

第 40 课时 向量的数量积 (2) 学习指南

【学习目标】

- 1.能类比实数的乘法运算律探索平面向量数量积的运算律,并能够通过“举反例”澄清一些认识,纠正一些错误,体会实数的乘法运算与向量的数量积运算的差异;
- 2.能推导平面向量数量积的三个运算律,并能运用它们进行一些简单的数量积运算;
- 3.会用平面向量的数量积处理有关向量的长度、角度和垂直等问题.

【学习指导】

1.平面向量数量积的运算律

【问题 1】实数的乘法运算满足哪些运算律?

答: (1) 交换律: $a \cdot b = b \cdot a$;

(2) 结合律: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(3) 分配律: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

【问题 2】平面向量的数量积运算满足哪些运算律? 你会证明这些运算律吗?

答: (1) 交换律: $a \cdot b = b \cdot a$;

(2) 数乘向量的结合律: $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b)$;

(3) 分配律: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

证明: (1) 交换律: $a \cdot b = b \cdot a$;

【思路一】从“数”的角度

设 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta = |b| \cdot |a| \cos \theta = b \cdot a$.

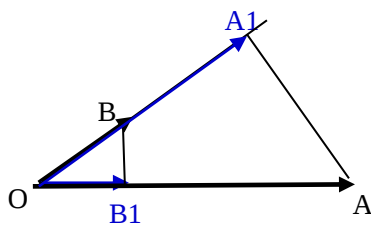
【思路二】从“形”的角度

如图, 则根据数量积的几何意义 (投影向量), $a \cdot b = |OA| \cdot |OB_1|$, $b \cdot a = |OB| \cdot |OA_1|$

因为 $\triangle OAA_1 \sim \triangle OBB_1$, 所以 $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$

所以 $a \cdot b = b \cdot a$.

当 a 与 b 的夹角不是锐角时, 同理可证.



(2) 数乘结合律 $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b)$ 的证明

与交换律类似（需对 λ 的符号进行讨论），此处从略。

(3) 分配律 $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 的证明教材中很详细，此处略作说明：

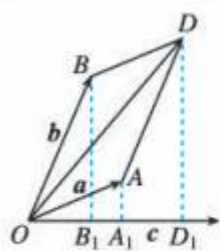
①由于式子中涉及的向量较多，它们夹角之间的关系比较复杂，单纯用代数形式比较困难；

②向量数量积的几何意义就要借助投影向量. 此处的关键在于证明：向量 $a+b$ 在向量 c 上的投影向量等于向量 a, b 在向量 c 上的投影向量的和，也就是 $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$. 由平行四边形的性质得出 $|\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{BD_1}|$ 是基础；

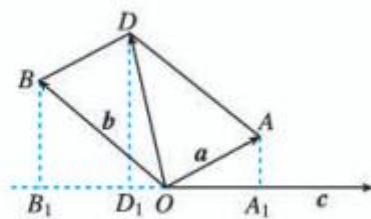
③此处证明的难点是构造图形. 为了直观，

可以在画草图的基础上，借助信息技术

画出不同情形的辅助图形.



(1)



(2)

【问题 3】若 a, b, c 是向量， $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ 一定成立吗？ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ 呢？

为什么？

答： $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ 不一定成立。

因为 $(a \cdot b)c$ 是与向量 c 共线的向量；而 $a(b \cdot c)$ 是与向量 a 共线的向量。

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ 一定不成立。因为 $(a \cdot b) \cdot c$ 和 $a \cdot (b \cdot c)$ 都没有意义。

【问题 4】若 $a, b \in R$ ，则由 $ab = 0$ ，能推出 $a = 0$ 或 $b = 0$ 吗？

若 a, b 是平面内两个向量，由 $a \cdot b = 0$ ，能推出 $a = 0$ 或 $b = 0$ 吗？

答：若 $a, b \in R$ ，则由 $ab=0$ ，能推出 $a=0$ 或 $b=0$ ；

若 a, b 是平面内两个向量，由 $a \cdot b = 0$ ，不能推出 $a=0$ 或 $b=0$ 。

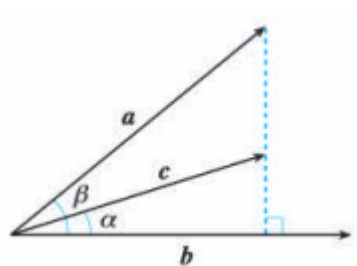
【问题 5】若 $a, b, c \in R$ ，则由 $ab=bc, b \neq 0$ ，能推出 $a=c$ 吗？

若 a, b, c 是向量，则由 $a \cdot b = b \cdot c, b \neq 0$ ，能推出 $a=c$ 吗？

答：若 $a, b, c \in R$ ，则由 $ab=bc, b \neq 0$ ，能推出 $a=c$ ；

若 a, b, c 是向量，则由 $a \cdot b = b \cdot c, b \neq 0$ ，不能推出 $a=c$ 。

如图



2. 平面向量数量积的应用

【应用一】推导公式

【例 11】对任意 $a, b \in R$ ，恒有 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ， $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

对任意向量 a, b ，是否也有类似的结论？

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2; (2) (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$$

解：因为 $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ ；

$$(a+b) \cdot (a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2.$$

所以，对任意向量 a, b ，也有类似的结论。

【说明】向量的数量积与线性运算的混合运算可以模仿实数多项式的乘法运算进行。

【应用二】数量积运算

【例 12】已知 $|a|=6, |b|=4$ ， a 与 b 的夹角 $\theta = 60^\circ$ ，求 $(a+2b) \cdot (a-3b)$ 。

解： $(a+2b) \cdot (a-3b) = a^2 - a \cdot b - 6b^2 = |a|^2 - a \cdot b - 6|b|^2$

$$=|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta-6|\mathbf{b}|^2=6^2-6\times 4\cos 60^\circ-4^2=-72.$$

【说明】正确运用向量数量积的运算律是解决本题的关键.

【应用三】垂直问题

【例 13】已知 $|\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=4$, 且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, k 为何值时, 向量 $\mathbf{a}+k\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}-k\mathbf{b}$ 互相垂直?

解: 因为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 所以 $\mathbf{a}+k\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}-k\mathbf{b}$ 均不可能是零向量,

所以 $(\mathbf{a}+k\mathbf{b})\perp(\mathbf{a}-k\mathbf{b})\Leftrightarrow(\mathbf{a}+k\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-k\mathbf{b})=0$, 即 $\mathbf{a}^2-k^2\mathbf{b}^2=0$.

依题意 $9-16k^2=0$, 解得 $k=\pm\frac{3}{4}$.

【说明】向量垂直关系问题常常转化为数量积为 0 的向量运算问题.

【应用四】模与夹角问题

【例 14】已知 $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{b}|=\sqrt{2}$.

(1) 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 45° , 求 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$;

(2) 若 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 垂直, 求 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

解: (1) 依题意, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2=1+2\times 1\times\sqrt{2}\cos 45^\circ+2=5$,

所以 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{5}$;

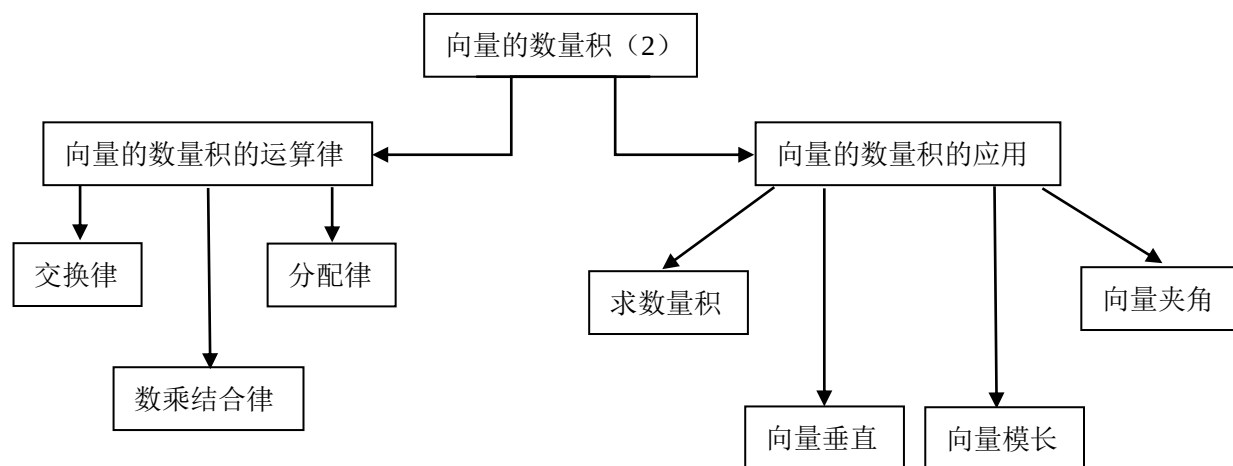
(2) 因为 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 垂直, 所以 $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=0$, 即 $\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. 依题意, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1$.

设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $\theta\in[0^\circ, 180^\circ]$, 所以 $\theta=45^\circ$, 即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 45° .

【说明】向量的模长问题常常采取“平方”处理, 别忘了“再开方”; 向量的夹角问题常常运用“夹角公式”, 先求“数量积”, 再求“模的积”.

【课时小结】



注意：向量的数量积运算与实数的乘法运算既有相同的地方，也有差异，建议一定要记住并理解它们的差异之处！