6.2.3 平面向量的数乘运算学习指南答案

一、学习目标

1．能提出实数与向量相乘的概念，并能给向量数乘运算下定义；

2．能用类比的方法写出数乘运算的运算律，并能用向量数乘的定义加以验证；

3．建构出用向量数乘运算以及运算律解决问题的个人方法.

二、学法指导

建议同学们以构建起自己的用实数与向量相乘解题的方法为学习目标的总思路学习.以这样的总目标学习，需要你思考：何为实数与向量相乘？如何给出定义？实数与向量相乘有哪些运算律呢？有了定义与运算律，你是不是会产生用定义与运算律来解决问题的想法呢？这就需要你自己去验证你的想法了，你需要用你的想法解决教材中的例 5~例 8 之后，才能把你的想法变成了你的方法了。

任务一：提出实数与向量相乘的概念，并能给向量数乘运算下定义

情境与问题 1 实数与向量相乘的结果是数量，还是向量呢？你想用何种方法给出向量数乘运算的定义呢？你给出的定义是什么？

答：实数与向量相乘的结果仍是向量；用对实数分类与概括的方法，给出定义；

定义为：一般地，实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$，它的长度与方向规定如下：

(1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

情境与问题 2 实数与向量相乘有哪些运算律呢？请你试着写出来，并加以验证

答：

根据实数与向量的积的定义，可以验证下面的运算律是成立的：

设 λ、μ 为实数，则

(1) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$； (结合律)

(2) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$； (第一分配律)

(3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$. (第二分配律)

任务二：提出用实数与向量相乘以及运算律尝试解决问题的想法，并验证你的想法

情境与问题3 教材例5，计算：

（1） $(-3)\times 4\vec{a}$；（2） $3(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{a}-\vec{b})-\vec{a}$；

（3） $(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})-(3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$

答：参见教材.

情境与问题4 教材例6，平行四边形$ABCD$的两条对角线相交于点M，

且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ，用 $\vec{a},\vec{b}$表示 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

答：参见教材.

反思：从的$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$表达式可以看出，平面内的一个向量可以用两个不共线的向量表示出来.

情境与问题5 试探究向量$\lambda\vec{a}(\vec{a}\neq\vec{0})$所在直线与$\vec{a}$所在直线的位置关系，你有新的发现吗？

答：共线；可以发现：

向量$\vec{a}(\vec{a}\neq 0)$与$\vec{b}$共线的充要条件是：存在唯一一个实数λ，
使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$

情境与问题6 教材例7，已知任意两个非零向量$\vec{a},\vec{b}$，

试作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{a}+3\vec{b}.$

猜想A,B,C三点之间的位置关系，并证明你的结论.

答：通过画图可猜测A,B,C三点共线. 要证明三点共线，只需证明向量$\overrightarrow{AC}$与向量$\overrightarrow{AB}$是否共线即可. 而要证明两向量是否共线根据向量数乘定义，就是看是否存在λ，使$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$成立，详细答案参见教材.

情境与问题7 教材例8，

已知$\vec{a},\vec{b}$是两个不共线的向量，向量$\vec{b}-t\vec{a},\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$共线，
求实数t的值.

思路分析：用条件$\vec{a},\vec{b}$不共线，我们能得到什么呢？$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$一定是非零向量，

为什么呢？一种解释，用作图法做出向量$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$可观察是非零向量；第二种解释，假设

$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}=3\vec{b}\Rightarrow\vec{a},\vec{b}$共线，这与条件$\vec{a},\vec{b}$不共线矛盾.

条件共线$\vec{b}-t\vec{a},\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$又如何使用呢？

可知存在实数λ，使得

$$\vec{b}-t\vec{a}=\lambda\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right),\quad 即\left(t+\frac{1}{2}\lambda\right)\vec{a}=\left(\frac{3}{2}\lambda+1\right)\vec{b}$$

这是一个关于t的方程.

任务三：回顾反思，将本节课所获得的知识归入并更新自己的知识体系

本节课你提出与创造了什么？你是怎么提出与创造的？你以前有类似提出与创造吗？你能丰富你自己的提出与创造方法吗？你能把你创造的方法（向量数乘）解决问题吗？你能把你本节课获得的新方法表达并分享向给大家吗？