

向量数量积拓展提升

1. 若 $|\vec{a}|=5$, $\vec{a} \cdot \vec{b}=10$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , 则 $|\vec{b}|=$ _____.

【答案】4

【解析】因为 $\vec{a} \cdot \vec{b}=10$, $|\vec{a}|=5$, 所以 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ = 10$, 所以 $|\vec{b}|=4$.

2. (目标原题)已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 45° , 则 $-2\vec{a}$ 与 $3\vec{b}$ 的夹角是_____.

【答案】 135°

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A=\frac{\pi}{6}$, $B=\frac{\pi}{3}$, $BC=1$, 则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ 的值为_____.

【答案】3.

【解析】 $\because A=\frac{\pi}{6}, B=\frac{\pi}{3}, BC=1, \therefore C=\frac{\pi}{2}, BA=2, CA=\sqrt{3}.$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6} = 3.$$

4. 已知 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a} \cdot \vec{b}=-6$.

(1) 向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影为_____.

(2) 向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影为_____.

【解析】(1) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{3}{2},$

(2) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = -2.$

5. 已知 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° . 若 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角锐角, 则实数 λ 的取值范围为_____.

【答案】 $\left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{133}}{6}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{133}-13}{6}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

【解析】由题意可知 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3.$

又 $\because (\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\lambda\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a}^2 + (\lambda^2 + 1)\vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda\vec{b}^2,$

$\therefore \vec{a} + \lambda\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为锐角, $\therefore \lambda\vec{a}^2 + (\lambda^2 + 1)\vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda\vec{b}^2 > 0.$

$\because \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3, \therefore 3\lambda^2 + 13\lambda + 3 > 0.$

解得 $\lambda > \frac{\sqrt{133}-13}{6}$ 或 $\lambda < \frac{-13-\sqrt{133}}{6}.$

当 $\lambda=1$ 时， $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 共线，其夹角不为锐角，

故 λ 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{133}}{6}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{133}-13}{6}, 1\right) \cup (1, +\infty)$.