向量的数量积学习任务单

一、学习目标

1．理解平面向量的数量积，能解释平面向量数量积的物理意义，知道它的运算结果是数量；

2． 了解投影向量的意义；

3． 会计算平面向量的数量积，能用平面向量的数量积求向量的夹角和长度.

二、学法指导

本节在学习完向量的加减运算之后类比实数有加减乘除四则运算容易想到一个问题：两个向量可以加减，两个向量能否相乘？

借助在物理的矢量运算中“功”就是“两个矢量相乘”的结果，可以启发学生定义向量数量积的概念.

在获得平面向量数量积的概念之前，指引学生注意“功”中“力”和“位移”有夹角，借此可以给出向量夹角的定义. 在理解平面向量数量积的概念之后便可引导学生发现向量的数量积运算与几何图形的位置关系、形状，然后通过典型例题加深学生对于平面向量数量积的认识.

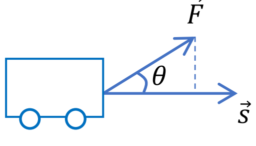
任务一： 了解平面向量数量积的物理背景

前面我们学习了向量的加、减、数乘运算，出现了一个自然的问题：两个向量能否相乘？如果能，那么向量的乘法该如何定义?

我们借助物理中位移概念引入了向量加法运算，那么，在物理的矢量运算中有没有“两个矢量相乘”的实例呢？有，“功”就是“两个矢量相乘”的结果.

一个物体在力$\vec{F}$的作用下产生的位移$\vec{s}$, 那么力$\vec{F}$所做的功$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$, 其中力$\vec{F}$和位移$\vec{s}$是向量，$\theta$为$\vec{F}$与$\vec{s}$的夹角，而功W是数量.

仿照“功”的计算方法，我们引入“两个向量相乘”的概念，即向量的“数量积”.

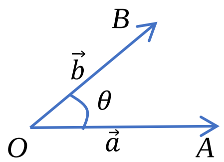


定义之前，我们先介绍两个概念：

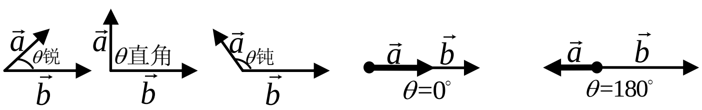
任务二：学习向量的夹角和投影向量的定义

1、向量的夹角

两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$点O是平面上的任意一点，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\angle AOB=\theta,(0\le\theta\le\pi)$叫做向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角.



当向量$\overrightarrow{OB}$绕着点O旋转时，我们能得到关于夹角的 5 个情况：



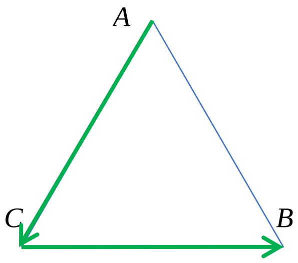
当向量确定后，夹角也就确定了.

注意：**特殊的夹角与向量的位置关系**

①若$\theta=0$，$\vec{a}$与$\vec{b}$同向　　②若$\theta=\pi$，$\vec{a}$与$\vec{b}$反向　　③若$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直

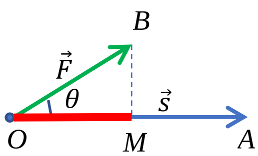
练习：

等边三角形 ABC 中，向量$\overrightarrow{AC}$与向量$\overrightarrow{CB}$的夹角为?



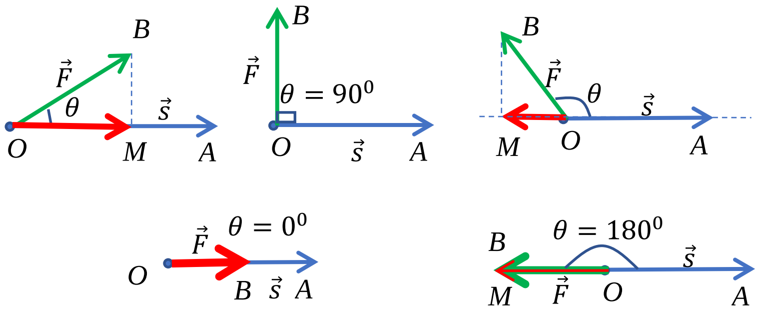
2、投影向量

在“功”的计算中，$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$，我们发现



线段 OM 的长度恰为$|OM|=|\vec{F}|\cos\theta$，是点 B 向线段 OA 作垂线得到的，即 OB 在线段 OA 的投影.

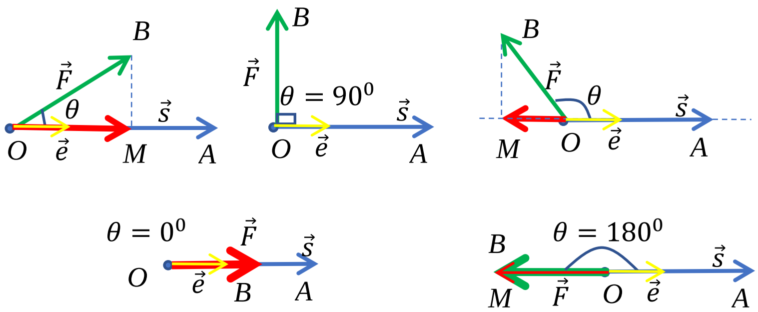
按照这个思路向量$\overrightarrow{OM}$就可以叫做向量$\overrightarrow{OB}$在向量$\overrightarrow{OA}$方向上的投影向量，如下图.



我们发现，投影向量$\overrightarrow{OM}$有时与$\overrightarrow{OA}$同向，有时反向，还有零向量，这与夹角θ取值范围有关.

既然投影向量是向量，那么我们要考虑其大小与方向. 从刚才的分析看出，投影向量$\overrightarrow{OM}$的大小$|\overrightarrow{OM}| = |(|\overrightarrow{OB}|\cos\theta)|$, 而方向要以向量$\overrightarrow{OA}$为参照物，有时与$\overrightarrow{OA}$同向，有时与$\overrightarrow{OA}$反向，还有零向量.

我们把二者整合一下，设与向量$\overrightarrow{OA}$方向相同的单位向量为$\vec{e}$.



$\overrightarrow{OM}$与$\vec{e}$共线，于是$\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{e}$, 此时$|\overrightarrow{OM}| = |\lambda|$，此时$|\lambda| = |(|\overrightarrow{OB}|\cos\theta)|$.

第一个图，θ为锐角，$\overrightarrow{OM}$与$\vec{e}$同向，此时$\lambda > 0$,

此时$\cos\theta > 0$，$\lambda = |\overrightarrow{OB}|\cos\theta > 0$，$\overrightarrow{OM} = (|\overrightarrow{OB}|\cos\theta)\vec{e}$；

第三个图，θ为钝角，$\overrightarrow{OM}$与$\vec{e}$反向，此时$\lambda < 0$,

此时$\cos\theta < 0$，$\lambda = |\overrightarrow{OB}|\cos\theta < 0$，$\overrightarrow{OM} = (|\overrightarrow{OB}|\cos\theta)\vec{e}$；

第二个图，$\theta = 90^0$，$\overrightarrow{OM} = \vec{0}$，此时$\lambda = 0$,

此时$\cos\theta = 0$，$\lambda = |\overrightarrow{OB}|\cos = 90^0 = 0$，$\overrightarrow{OM} = (|\overrightarrow{OB}|\cos\theta)\vec{e}$；

第四个图，$\theta = 0^0$，$\overrightarrow{OM}$与$\vec{e}$同向，此时$\lambda > 0, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB}$，此时$\lambda = |\overrightarrow{OB}|$,

此时$\cos\theta = 1$，$\lambda = |\overrightarrow{OB}|\cos 0^0$，$\overrightarrow{OM} = (|\overrightarrow{OB}|\cos\theta)\vec{e}$；

第五个图，$\theta = 180^0$，$\overrightarrow{OM}$与$\vec{e}$反向，$\lambda < 0, \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OB}$，

此时$\cos\theta=-1$，$\lambda=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos 0^0$，$\overrightarrow{OM}=(\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta)\vec{e}$；

综上，对任意$\theta\in[0,\pi]$, 都有$\overrightarrow{OM}=(\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta)\vec{e}$.

接下来，我们定义两个向量“相乘”.

任务三 、学习向量数量积的概念

1、概念：

已知两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，它们的夹角为θ，我们把数量$|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$叫做向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$的数量积（或内积），记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$, 即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$.

特殊规定：零向量与任一向量的数量积为 0，即$\vec{0}\cdot\vec{a}=0$

特别说明：

（1）向量线性运算的结果是向量，而数量积的运算结果是数量；

（2） 两向量的数量积运算，也叫内积，记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$, 中间的“·”不能省略，也不能写成$\vec{a}\times\vec{b}$.

例 1、已知$|\vec{a}|$=5, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta=\frac{2\pi}{3}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

例 2、设$|\vec{a}|$=12，$\left|\vec{b}\right|=9$，$\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}=-54\sqrt{2}$, 求$\vec{a}$与$\vec{\mathrm{b}}$的夹角.

任务四、探究向量的数量积运算与几何图形的位置关系、形状

设非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，它们的夹角是θ，

（1）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$(借助数量积的概念，通过计算，实现几何中的位置关系的判定)

（2）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{\mathrm{b}}\right|\Leftrightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$同向；（公式中的cosθ哪去了？）

特例：由$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|cos0=|\vec{a}|^2\Leftrightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$——（“见模平方”，求非零向量的模长）

（3）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{\mathrm{b}}|\Leftrightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$反向；（公式中的cosθ哪去了？）

（4）若$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{\mathrm{b}}|\Leftrightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$共线；（公式中的cosθ哪去了？）

注意：$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||cos\theta|\ll|\vec{a}||\vec{b}|$

小结

一、两个概念：夹角和投影向量（会画 5 个图），夹角公式 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$;

二、向量的数量积运算

1、定义：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$；

2、向量的数量积运算与几何图形的位置关系、形状

（1）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$；

（2）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{\mathrm{b}}|\Leftrightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$同向；

（3）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{\mathrm{b}}|\Leftrightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$反向；

3、“见模平方”：$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

4、$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||cos\theta|\ll|\vec{a}||\vec{b}|$