函数的性质进一步研究第 16 课时

1A　2.B

3.设函数 $f(x)=me^x-x^2+3$，其中 $m\in\mathbf{R}$． 若在区间[0,2]上，函数 $y=f(x)$ 上无极值点，求实数 m 的取值范围；

【解析】$\because$ $y=f(x)$ 在区间[0,2]上无极值，等价于 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，或 $f'(x)\le 0$ 恒成立

$\because$ $f'(x)=me^x-2x$

①若 $f'(x)\ge 0$ 恒成立

$\therefore$ $me^x-2x\ge 0$

$\therefore$ $m\ge\dfrac{2x}{e^x}$

设 $h(x)=\dfrac{2x}{e^x}$,则 $m\ge[h(x)]_{\max}$， 或 $m\ge[h(x)]_{\max}$， $x\in[0,2]$

$\because$ $h'(x)=(\dfrac{2x}{e^x})'=\dfrac{2e^x\cdot(1-x)}{(e^x)^2}=\dfrac{2(1-x)}{e^x}$

$\therefore$ 令 $h'(x)=0$，得 $x=1$

x	0	(0,1)	1	(1,2)	2
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	0	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	$\dfrac{4}{e^2}$

$\therefore$ $m\ge\dfrac{2}{e}$

②若 $f'(x)\le 0$ 恒成立

即： $me^x-2x\le 0$

$m\ge[h(x)]_{\min}$， $x\in[0,2]$

同理①知， $m\le 0$

综上， $m\le 0$，或 $m\ge\dfrac{2}{e}$

4.设 $f\left(x\right)=\dfrac{a}{x^2}+\ln x\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）当 $a=0$ 时，直线 $y=ex+m$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线，求 m 的值；

（2）若 $f(x)-\dfrac{1}{x}\ge 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【解析】（1）当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)=\ln x$，$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$.

设切点 $P\left(x_0,y_0\right)$，则 $f'\left(x_0\right)=\dfrac{1}{x_0}=e$，

所以 $x_0=\dfrac{1}{e}$，$y_0=-1$.

把切点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 的坐标代入切线方程 $y=ex+m$，得 $m=-2$；

（2）定义域：$\left(0,+\infty\right)$

$f(x)-\dfrac{1}{x}\ge 0$ 恒成立，即 $\dfrac{a}{x^2}+\ln x-\dfrac{1}{x}\ge 0$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，

也就是，$a\ge x-x^2\ln x$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，

令 $h\left(x\right)=x-x^2\ln x$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，则要 $a\ge[h(x)]_{\max}$

$h'\left(x\right)=1-2x\ln x-x=(1-x)-2x\ln x$.

$\because h'\left(1\right)=0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，因为 $1-x>0$，$-2x\ln x>0$，所以 $h'\left(x\right)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，因为 $1-x<0$，$-2x\ln x<0$，所以 $h'\left(x\right)<0$.

知，$h\left(x\right)$ 在 $x=1$ 时取得极大值 $h\left(1\right)=1$.

$\because$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内 $h\left(x\right)$ 只有一个极大值，

$\therefore h\left(1\right)=1$ 也是最大值.

$\therefore a\ge 1$.

所以，a 的取值范围是 $\left[1,+\infty\right)$.