

函数的性质进一步研究第 16 课时

【学习目标】

1. 对导数相关概念进行复习，明确用导数求函数单调区间、极值、最值步骤；
2. 通过例题分析与讲解，了解分离参数法求参数取值范围的基本步骤，提高将特定问题转化为用分离参数方法解决的恒成立问题的能力；
3. 通过练习与听讲，理解恒成立问题的本质，体会分类讨论、数形结合等数学思想方法。

【学习内容】

知识回顾：

一、函数的单调性：

求可导函数单调区间的一般步骤和方法：

- 1) 确定函数的 $f(x)$ 的定义区间；
- 2) 求 $f'(x)$ ，令 $f'(x)=0$ ，解此方程，求出它在定义区间内的一切实根；
- 3) 把函数 $f(x)$ 的无定义点的横坐标和上面的各实数根按由小到大的顺序排列起来，然后用这些点把函数 $f(x)$ 的定义区间分成若干个小区间；
- 4) 确定 $f'(x)$ 在各个区间内的符号，由 $f'(x)$ 的符号判定函数 $f(x)$ 在每个相应小区间内的单调性.

二、函数的极值

求函数的极值的三个基本步骤

- 1) 求导数 $f'(x)$ ；
- 2) 求方程 $f'(x)=0$ 的所有实数根；
- 3) 检验 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根左右的符号，如果是左正右负（左负右正），则 $f(x)$ 在这个根处取得极大（小）值.

三、求函数最值

- 1) 求函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的极值；
- 2) 将极值与区间端点函数值 $f(a), f(b)$ 比较，其中最大的一个就是最大值，最小的一个就是最小值.

例 1：已知函数 $f(x)=e^x-ax, (x>0)$ ，若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

分析：

例 2: 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = (-x^2 + ax)e^x$ ($x \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数), 若函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围.

分析:

例 3. 设函数 $f(x) = \frac{x^3}{3} - (a+1)x^2 + 4ax + b$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上无极值点, 求实数 a 的取值范围.

分析:

例 4: 设 l 为曲线 $C: y = \frac{\ln x}{x}$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线.

(1) 求 l 的方程;

(2) 证明: 除切点 $(1, 0)$ 之外, 曲线 C 在直线 l 的下方

通过这节课的学习, 你有哪些收获? 请把你的收获写下来.

【课堂总结】

标志词: “任意”, “所有”, “均有”, “恒成立” 等等, 均与恒成立问题相关;

一、通过比较, 进一步明确分离参数的方法对于解决恒成立问题的优势, 借助参变分离、函数、导数, 我们能够解决以下几类恒成立问题:

①函数 $f(x) \geq 0$, 或 $f(x) \leq 0$ ($f(x) > 0$, 或 $f(x) < 0$) 类恒成立问题;

②与单调性有关恒成立问题;

③与无极值的恒成立问题;

④与 “曲线 $y = f(x)$ 在曲线 $y = g(x)$ 上方 (下方)” 问题;

总结提升: 解决恒成立问题的基本方法

1. 有参问题, 优先使用分离参数法, 有时可以避开繁琐的讨论;

2. 无参问题, 直接研究函数的形态, 注意数形结合;

当然, 在解决问题时, 要根据所给问题的特点, 选择恰当的方法来解题, 并在解题过程中, 能够依据解题的进程合理地调整解题策略.

【学法指导】

例 1:

- ①含参恒成立问题，优先分离参数法，深刻理解分离参数的优点；
- ②在用分参法将原式转化为不含参数的函数求最值问题，在整理过程中应注意变号与不变号问题；
- ③本题中转化 $a \leq [h(x)]_{\min}$ ，用导数、函数求不含参函数 $h(x)$ 最值，确定是最大还是最小，从而得到参数 a 的取值范围.

例 2:

- ①解决函数在给定区间上单调问题一般可等价转化函数在给定区间上有 $f'(x) \geq 0$ 恒成立，或有 $f'(x) \leq 0$ 恒成立问题；
- ②受定义域限制，当中间函数 $h(x)$ 对应最值取不到时，可以用区间表示 $h(x)$ 取值范围，同时，参数范围也注意参数对应端点对应能否取到.

例 3: ①给定区间上无极值求参数范围问题的可等价转化函数在给定区间单调问题具体思路可类比例 2;

- ②求解过程中要分清 $f'(x) = 0$ 得到的是可能极值点，要判断哪些是极值点，哪些不是.

同时，注意前三道例题之间的逻辑关系，这样能更好地理解学习内容。

例 4: ①“曲线 $y = f(x)$ 在曲线 $y = g(x)$ 上方（下方）”，可等价

于构造 $F(x) = f(x) - g(x) > 0$ ，或 $F(x) = f(x) - g(x) < 0$ 恒成立；

- ②通过构造，将图形的位置关系转化为函数运算关系，方便了我们研究函数图象的方法，此种方法也可以推广到两个函数的不等关系的证明问题中.