

函数的性质进一步研究第 15 课时—课后作业答案

(1) 函数定义域为 $\mathbf{R}$; $f'(x) = e^x(x^2 + 2x - a)$;

函数 $f(x)$ 在 $(-3, 0)$ 上单调递减;

即当 $x \in (-3, 0)$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立;

$\because e^x > 0$ 恒成立,

$\therefore x^2 + 2x - a \leq 0$ 在 $(-3, 0)$ 恒成立;

$g(x) = x^2 + 2x - a$ 的对称轴为 $x = -1$;

$\therefore g(x)$ 在 $(-3, -1)$ 单调递减, 在 $(-1, 0)$ 单调递增;

当 $x \in (-3, 0)$ 时, $x^2 + 2x - a \leq 0$ 恒成立等价于 $\begin{cases} g(-3) \leq 0 \\ g(0) \leq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a \geq 3 \\ a \geq 0 \end{cases}$, $\therefore a \geq 3$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减,

则 $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - m \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \leq m$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

设 $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} (x > 0)$,

则 $m \geq [g(x)]_{\max}$.

因为 $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = -(\frac{1}{x} - 1)^2 + 1 (x > 0)$,

所以当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 有最大值 1.

所以 m 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

