

函数的性质进一步研究第 14 课时—拓展提升任务答案

(I) 解: $f'(x) = x + 2e - \frac{3e^2}{x}$.

由题意有 $f'(x_0) = 0$ 即 $x_0 + 2e - \frac{3e^2}{x_0} = 0$, 解得 $x_0 = e$ 或 $x_0 = -3e$ (舍去).

得 $f(e) = 0$ 即 $\frac{1}{2}e^2 + 2e^2 - 3e^2 \ln e - b = 0$, 解得 $b = -\frac{1}{2}e^2$.

(II) 证明: 由 (I) 知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2ex - 3e^2 \ln x + \frac{e^2}{2} (x > 0)$,

$$f'(x) = x + 2e - \frac{3e^2}{x} = \frac{(x-e)(x+3e)}{x} (x > 0).$$

在区间 $(0, e)$ 上, 有 $f'(x) < 0$; 在区间 $(e, +\infty)$ 上, 有 $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 单调递增,

于是函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值是 $f(e) = 0$.

故当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) \geq 0$ 恒成立.

(III) 解: $F(x) = f'(x) + \frac{a}{x} = x + \frac{a - 3e^2}{x} + 2e (x > 0)$.

当 $a > 3e^2$ 时, 则 $F(x) = x + \frac{a - 3e^2}{x} + 2e \geq 2\sqrt{a - 3e^2} + 2e$, 当且仅当 $x = \sqrt{a - 3e^2}$

时等号成立,

故 $F(x)$ 的最小值 $m = 2\sqrt{a - 3e^2} + 2e > 2e$, 符合题意;

当 $a = 3e^2$ 时, 函数 $F(x) = x + 2e$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 不存在最小值, 不合题意;

当 $a < 3e^2$ 时, 函数 $F(x) = x + \frac{a - 3e^2}{x} + 2e$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 不存在最

小值, 不合题意.

综上, 实数 a 的取值范围 $(3e^2, +\infty)$.