函数的性质进一步研究第 14 课时—学习指南（答案）

例 1 已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)+\dfrac{1-x}{1+x}$（$x\geq 0$），其中 $a>0$．

（Ⅰ）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，求实数 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 的最小值为 1，求实数 a 的取值范围．

解：（Ⅰ）因为 $f'(x)=\dfrac{a}{ax+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{ax^2+a-2}{(ax+1)(x+1)^2}$．

$\because f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，$\therefore f'(1)=0$．$\therefore \dfrac{2a-2}{4(a+1)}=0$，解得 $a=1$．

经检验，$a=1$ 时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，符合题意，所以 $a=1$ ．

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{ax^2+a-2}{(ax+1)(x+1)^2}$，

$\because x\geq 0$，$a>0$，$\therefore ax+1>0$，$x+1>0$．

①当 $a-2\geq 0$，即 $a\geq 2$ 时，$f'(x)\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$.

②当 $a-2<0$，即 $0<a<2$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$（舍负）;

x	0	$(0,\sqrt{\frac{2-a}{a}})$	$\sqrt{\frac{2-a}{a}}$	$(\sqrt{\frac{2-a}{a}},+\infty)$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	1	↘	极小值	↗

$\therefore f(x)$ 的最小值 $f\left(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)<f(0)=1$，不符合题意.

综上可知，若 $f(x)$ 的最小值为 1，则实数 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$．

例 2　　**已知函数 $f(x)=2x\ln x-mx$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最小值为 $-\mathrm{e}$，求 m 的值．**

解：　因为 $f'(x)=2\ln x-m+2$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}}$．

①当 $\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}}\le 1$，即 $m\le 2$ 时，则 $f'(x)\ge 0$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 单调递增，

∴ $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=-m=-\mathrm{e}$，故 $m=\mathrm{e}$，不满足 $m\le 2$，舍去；

②当 $\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}}\ge \mathrm{e}$，即 $m\ge 4$ 时，则 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递减，

∴ $f(x)$ 的最小值为 $f(\mathrm{e})=2\mathrm{e}-m\mathrm{e}=-\mathrm{e}$，故 $m=3$，不满足 $m\ge 4$，舍去；

③当 $1<\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}}<\mathrm{e}$，即 $2<m<4$ 时，

x	1	$(1,\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}})$	$\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}}$	$(\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}},\mathrm{e})$	e
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	极小值	↗	

∴ $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}}\right)=-2\mathrm{e}^{\frac{m-2}{2}}=-\mathrm{e}$，解得 $m=-2\ln 2+4$，满足 $2<m<4$．

综上，m 的值为 $-2\ln 2+4$．

归纳小结

1．$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值 $\Leftrightarrow f'(x_0)=0$ 且在 x_0 两侧导数异号；

2．已知函数（含参数）的极值或最值确定参数的取值或取值范围时，首先是求出函数的极值或最值，再结合条件就参数；

3．求参数时，可以通过解方程求值，要注意检验改值是否在讨论的范围内；不易求值时，也可以借助同一单调区间内的已知值进行分析．