复数的乘、除运算学习任务单

一、学习目标

1. 理解并掌握复数乘、除法的运算法则；

2. 通过对复数乘、除法的运算法则的学习，进一步感受数系扩充的共性—“规则”；

3. 通过乘法的逆运算推导得出复数除法的运算法则，提升学生的数学运算素养.

二、学法指导

在数学学习中，类比学习是最常用的学习方法. 在两个具有相似属性的对象间，类比已经掌握的对象来对未知的对象进行探究，可以高效地实现对新知识的理解. 本节课主要类比学习复数的加、减法运算来学习复数的乘、除法运算，进一步感受数系扩充的共性—“规则”.

任务一：回顾复数的加、减法运算法则

1. 复数的加法法则：

设$z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，则$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$

复数的减法法则：

设$z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，则$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$

2. 复数的加法满足交换律、结合律：

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$

任务二：学习复数乘法运算法则

1. 我们感受到在整个数系扩充的过程中，从有理数到实数再到现在引入复数，我们都希望在新数系中的加法、乘法运算与原数系中协调一致，进而上节课我们规定了复数的加法运算法则，同样在此“规则”的引导下，我们类比多项式的乘法将复数的乘法法则规定如下：

设$z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，则：

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})\\ &=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2\\ &=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}\end{aligned}$$

特别地，当$\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2$为实数时，即$\mathrm{b}=0,\mathrm{d}=0$, 那么两复数的积就是对应两实数

的积.

2. 复数的乘法是否满足交换律、结合律？乘法对加法满足分配律吗？

我们来证明复数的乘法满足交换律，证明如下：

设$z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in R)$，则：

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})\\ &=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2\\ &=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2\cdot z_1&=(c+d\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})\\ &=ac+bc\mathrm{i}+ad\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2\\ &=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i} \end{aligned}$$

所以有$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$，因此复数的乘法满足交换律.复数乘法的结合律以及对加法的分配律，大家自己试着证明一下吧！

下面我们来用乘法法则做以下 4 个练习

例 1　（1）$(3+4\mathrm{i})(-2-3\mathrm{i})$　　　（2）$(1-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})$

例 2　（1）$(1+\mathrm{i})^2$　　　（2）$(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})$

※填空①$(1-\mathrm{i})^2=$________

②$\mathrm{i}^1=$_____；$\mathrm{i}^2=$_____；$\mathrm{i}^3=$_____；$\mathrm{i}^4=$_____；$\mathrm{i}^5=$____；　　你发现什么规律了吗？你能直接完成下面这个填空吗？

$\mathrm{i}^n=$_____；

例 2（2）是两个共轭复数相乘，所得结果是一个数，这个数有什么和这两个复数有什么关系呢？$(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})$的结果是什么？

我们发现$\mathrm{z}\cdot\bar{\mathrm{z}}=|\mathrm{z}|^2=|\bar{\mathrm{z}}|^2$，共轭复数还有一些性质：

※如果z_1，z_2为共轭复数则有：①$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

②$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$

任务三：探究复数除法运算法则

1. 类比减法是加法的逆运算，可由复数的加法运算法则推出减法运算法则，而除法也是乘法的逆运算，故可由乘法的运算法则推出，你自己试着推导一下.

※推导过程如下：设 $z_1 = a + b\mathrm{i}, z_2 = c + d\mathrm{i}(a, b, c, d \in R)$，则：设 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = x + y\mathrm{i}$，目标求$x$，$y$

因为$(c + d\mathrm{i})(x + y\mathrm{i}) = a + b\mathrm{i}$, 根据复数的乘法法则将等式左侧展开有：

$$cx + cy\mathrm{i} + dx\mathrm{i} + dy\mathrm{i}^2 = a + b\mathrm{i}$$

$$(cx - dy) + (cy + dx)\mathrm{i} = a + b\mathrm{i}$$

所以根据两复数相等的条件有：$cx - dy = a$ ， $cy + dx = b$

由此可得：$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$　　$y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

于是有：$(a + b\mathrm{i}) \div (c + d\mathrm{i}) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$, 至此可得复数的除法法则.

2. 复数的除法法则显然不好记，我们观察$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$ 可以类比分式求值时分母为无理数的时候我们的做法是将分母“有理化”，那么这里我们可以将di看成分母中的无理数，对其化简，即上下同乘$\mathrm{c} - di$,，可得：

$$\frac{(a + b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})}{(c + d\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})} = \frac{ac - adi + bc\mathrm{i} - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$$

下面我们来用除法法则做以下 4 个练习

例 3：计算

（1）$(1 + \mathrm{i}) \div (1 - \mathrm{i})$　　　　（2）$\frac{(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{-\mathrm{i}}$

例 4：在复数范围内解下列方程

（1）$9x^2 + 16 = 0$　　　　（2）$ax^2 + bx + c = 0$，其中$a, b, c \in R, a \neq 0$

小结：我们发现在实数集中无解的方程，在复数集中都可解，由此可见数系扩充的必要性