第 34 课时复数全章复习---学习指南答案

1. 基本概念

例 1.若复数 $(a+\mathrm{i})^2\mathrm{i}$ 为正实数，则实数 a 的值为____________.

解析：

因为实数 a，又 $(a+\mathrm{i})^2\mathrm{i}=-2a+(a^2-1)\mathrm{i}$ 为正实数

所以 $\begin{cases}-2a>0,\\ a^2-1=0.\end{cases}$ 所以 $a=-1$

例 2. 设 z 的共轭复数是 $\overline{z}$，若 $z+\overline{z}=4, z\cdot\overline{z}=8,$，则 $\dfrac{\overline{z}}{z}$ =____________.

解析：

不妨设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$

又 $z+\overline{z}=4$，所以 $a=2$

又 $z\overline{z}=8$，所以 $z\overline{z}=|z|^2=8$

所以 $b=\pm2$，所以 $z=2+2\mathrm{i}$ 或 $z=2-2\mathrm{i}$

所以 $\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{2-2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$ 或 $\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{2+2\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}=\mathrm{i}$

2.复数运算

例 1．计算 $(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}})^4$

解析：$(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}})^4=(\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})})^4=(\dfrac{2\mathrm{i}}{2})^4=\mathrm{i}^4=1$

又解 $(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}})^4=(\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})^2})^2=(\dfrac{2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}})^2=(-1)^2=1$

例 2.在复数范围内解方程 $x^3=1$

解析：观察知 $x=1$ 是方程的一个根，或者立方差公式知

所以 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

方程 $x^2+x+1=0$ 有 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

所以原方程的根有 $x_1=1, x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, x_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

另解待定系数法：

设 $x^2+x+1=0$ 方程的根为 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$

所以 $(a+b\mathrm{i})^2+(a+b\mathrm{i})+1=0$

即 $(a^2+a-b^2+1)+(2ab+b)\mathrm{i}=0$

所以 $\begin{cases}a^2+a-b^2+1=0,\\2ab+b=0.\end{cases}$

当 $b=0$ 时，$a^2+a+1=0$ 无实数解

当 $b\neq 0$ 时，$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所以 $x_1=1, x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, x_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

结论：

$x_2^3=1 \qquad x_3^3=1$

$x_2{}^2+x_2+1=0$，$x_3{}^2+x_3+1=0$

$x_2^2=x_3$，$x_3^2=x_2$

3.几何意义

例 1. 在复平面内，复数 $\dfrac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}$ 对应的点的坐标为__________.

解析：

$$\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=\frac{2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$$

对应的点 $(1,-1)$

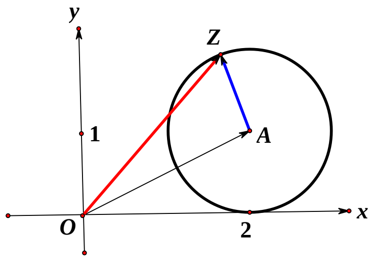
例 2. 已知 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，探究复平面内满足 $|z-(2+\mathrm{i})|=1$ 的点 Z 的

集合是什么图形？

解析：

由题意知点$Z(x,y)$，令$z_1=2+\mathrm{i}$对应的点是$A(2,1)$

所以复数z对应的向量$\overrightarrow{OZ}$，z_1对应的向量$\overrightarrow{OA}$



又$|z-(2+\mathrm{i})|=1$表示$|\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OA}|=1$，即$|\overrightarrow{AZ}|=1$

A为定点，Z为动点，且动点到定点距离为1

所以点Z的集合是以A为圆心，1为半径的圆.