

第 34 课时复数全章复习---学习指南

一. 学习目标

1. 通过解方程认识复数,理解复数的代数表示及几何意义,理解两个复数相等的含义;
2. 复数是一类重要的运算对象,有着广泛的应用,掌握复数代数表示式的四则运算,了解复数加、减法的几何意义;
3. 通过学习体会几何直观与代数运算的融合,感悟数学知识之间的联系,加强对数学整体性的理解,提升数学运算、直观想象和逻辑推理素养.

二. 学法指导

通过解方程,体会数系的扩充的必要性,类比有理数集扩充到实数集的过程,引出复数的概念及表示,将实数集扩充到复数集;复数与复平面的点、与以复平面原点为起点的向量之间都是一一对应关系,深刻理解复数与形的融合;数系有两个要素,一是组成数系的数,二是数系中的运算及运算律,既要保证与实数集中的运算协调一致,也要保证实数集中的运算律在复数集中也满足,其中加法运算与乘法运算是核心,减法和除法时它们的逆运算;由于复数有几何背景,要了解复数的运算的几何意义;在具体学习中提升数学运算、直观想象和逻辑推理素养.

三. 学习过程

1. 复数文化

在问题情境中了解数系的扩充过程,体会实际需求与数学内部的矛盾(数的运算规则、方程理论)在数系扩充过程中的作用,感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系

从数的发展理解数系扩充过程,体会人类认识问题的过程,感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.从数系的不完备到数系的发展,体会实际需求与数学内部的矛盾(数的运算规则、方程理论)在数系扩充过程中的作用,理解自然数集($\mathbf{N}$)(减法运算)→整数集($\mathbf{Z}$)(除法运算)→有理数集($\mathbf{Q}$)(开方运算)→实数集($\mathbf{R}$)的发展过程→复数集($\mathbf{C}$).

2. 知识框图

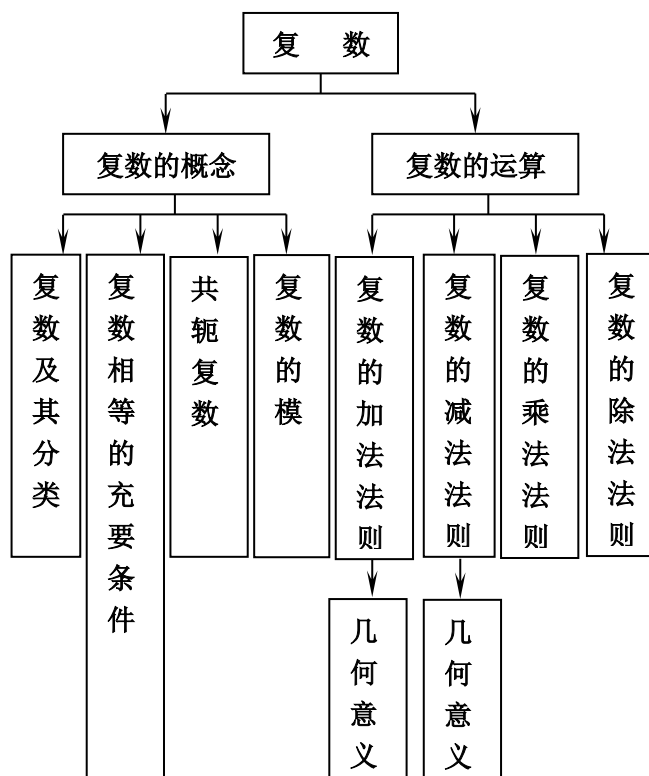
关注本章的两大主线:

一条主线是以复数代数形式($a+bi(a,b\in\mathbf{R})$)来描述复数的概念.

规定了加、乘两种运算法则,然后把减法、除法分别定义为加法、乘法的逆运算来推导出其运算法则.利用把复数代数形式 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 看成由 a,bi 两个非同类项组成的一个数,这样多项式的运算法则几乎可以全部搬过来照用不误,于是复数就与多项式、方程联系起来,从而能帮助解决一些多项式中因式分解、解方程等数学问题.

另一条主线是以复数的几何形式(复平面上的点或向量)来描述复数.

两条主线在教材中交替出现,有利于学生深入理解复数概念,培养和提高用数形结合观点来处理问题的能力.



3. 复数分类

$$\text{复数 } z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}) \begin{cases} \xrightarrow{b=0} z \text{ 是实数} \\ \xrightarrow{b \neq 0} z \text{ 是虚数} \begin{cases} \xrightarrow{a=0} z \text{ 是纯虚数} \\ \xrightarrow{a \neq 0} z \text{ 非纯虚数的虚数} \end{cases} \end{cases}$$

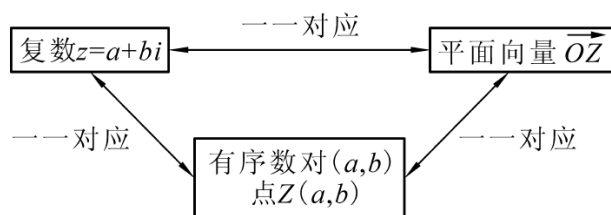
4. 复数相等

$$a + bi = c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R}) \text{ 当且仅当 } a = c \text{ 且 } b = d .$$

复数只能说相等与不等，而无大小（只有两个复数都是实数时，才可比较大小），而复数的模可以进行大小比较。

5. 几何意义

5. 几何意义



类比实数绝对值的几何意义，理解复数的模的几何意义是：复数 $a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 在复平

面上对应的点 $z(a,b)$ 到原点的距离.

6. 复数运算

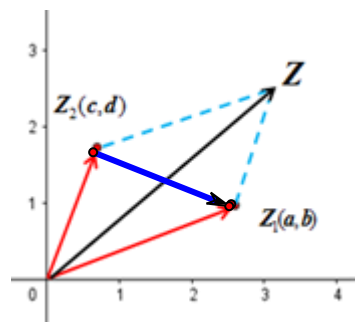
①运算过程:

复数的加、减法运算实质是合并同类项的过程,

复数的乘法运算可按“多项式乘法”来理解,

复数的除法运算可按“分母实数化”来理解;

②运算结果: 都可以写成 $a+bi(a,b \in \mathbf{R})$ 的形式



7. 常用结论

7.1 虚数 i 的周期性:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$$

$$i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n} = 1 \dots (n \in \mathbf{N}^*)$$

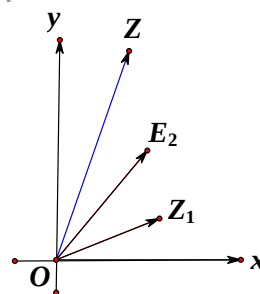
任何相邻四个数的和为 0;

【*】7.2 ω 的周期性

$$\text{设 } \omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{则 } \omega^3 = 1, \omega^2 = \overline{\omega} = \frac{1}{\omega}, \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

$$\omega^{3n} = 1, \omega^{3n-1} = \overline{\omega} = \frac{1}{\omega}, \quad \omega^{3n} + \omega^{3n-1} + \omega^{3n-2} = 0$$



7.3 常用化简

$$(1+i)^2 = 2i, (1-i)^2 = -2i$$

$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1+i}{1-i} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1$$

【*】7.4 复数的模

$$(1) |\bar{z}| = |z| \quad (2) z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (3) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (4) \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$(5) |z^n| = |z|^n \quad (6) ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

【*】7.5 共轭复数

(1) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in R$

(2) $\overline{\bar{z}} = z$

(3) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (\bar{z}_2 \neq 0)$

(6) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

8. 典例分析

1. 基本概念

例 1. 若复数 $(a+i)^2 i$ 为正实数，则实数 a 的值为_____.

例 2. 设 z 的共轭复数是 $\bar{z}$ ，若 $z + \bar{z} = 4, z \cdot \bar{z} = 8$ ，则 $\frac{\bar{z}}{z} =$ _____.

2. 复数运算

例 1. 计算 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$

例 2. 在复数范围内解方程 $x^3 = 1$

3.几何意义

例 1. 在复平面内，复数 $\frac{2i}{i-1}$ 对应的点的坐标为_____.

例 2. 已知 $z = x + yi (x, y \in \mathbf{R})$ ，探究复平面内满足 $|z - (2 + i)| = 1$ 的点 Z 的集合是什么图形？

编者注：带【*】的内容，初学有难度，为选学培优要求