

函数的性质进一步研究第 12 课时--课后作业答案

1. 讨论函数 $f(x) = e^x - 2ax$, $a \in \mathbf{R}$ 的单调性.

解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $f'(x) = e^x - 2a$ 。

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调递增;

(2) 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = e^x - 2a = 0$, 得 $x = \ln 2a$, 列表分析如下

x	$(-\infty, \ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓		↑

在 $(\ln 2a, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-\infty, \ln 2a)$ 上, $f'(x) < 0$, 所以在 $(-\infty, \ln 2a)$ 上单调递减。

综上所述: 当 $a \leq 0$ 时, 递增区间: $(-\infty, +\infty)$, 无递减区间;

当 $a > 0$ 时, 递增区间: $(\ln 2a, +\infty)$, 递减区间 $(-\infty, \ln 2a)$ 。

2. 已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$), 求函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 的单调区间

解: 定义域 $(0, 1)$, $f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{ax+1}{x^2}$

(1) 若 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是单调递增;

(2) 若 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = \frac{ax+1}{x^2} = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$,

① 若 $0 < -\frac{1}{a} < 1$ 即 $a < -1$ 时, 列表分析如下:

x	$(0, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, 1)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↑	极大值	↓

在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增,

在 $(-\frac{1}{a}, 1)$ 上, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减。

②若 $-\frac{1}{a} \geq 1$, 即 $-1 \leq a < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增;

综上所述: 当 $a \geq -1$ 时, 递增区间: $(0,1)$, 无递减区间;

当 $a < -1$ 时, 递增区间: $(0, -\frac{1}{a})$, 递减区间 $(-\frac{1}{a}, 1)$.