函数的性质进一步研究第 12 课时拓展提升任务答案

已知函数 $f\left(x\right)=\left(ax^2-x\right)\ln x-\frac{1}{2}ax^2+x\ \left(a\in\mathbf{R}\right)$．求函数 $f(x)$ 的单调区间.

解析：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

$f'(x)=(ax^2-x)\frac{1}{x}+(2ax-1)\ln x-ax+1=(2ax-1)\ln x$，

①当 $a\le 0$ 时，$2ax-1<0$，在 $(0,1)$ 上 $f'(x)>0$，在 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，在 $(0,1)$ 和 $(\frac{1}{2a},+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，在 $(1,\frac{1}{2a})$ 上 $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,\frac{1}{2a})$ 上单调递减；

③当 $a=\frac{1}{2}$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)\ge 0$ 且仅有 $f'(1)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④当 $a>\frac{1}{2}$ 时，在 $(0,\frac{1}{2a})$ 和 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，在 $(\frac{1}{2a},1)$ 上 $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2a})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2a},1)$ 上单调递减.