

函数的性质进一步研究第 12 课时学习指南

【学习目标】

1. 进一步掌握利用导数求含参函数单调性;
2. 进一步解决掌握不同类型导函数的处理方法;
3. 进一步明确含参函数求单调性分类讨论的依据及如何确定分类标准、如何展开分类讨论以及讨论后的整合问题,培养同学们的转化与化归的数学思想。

【学法指导】

进一步了解函数的单调性和导数的关系;

结合函数图象(几何直观)探讨归纳函数的单调性与导函数正负之间的关系,体会数形结合思想,一般地,在区间 (a,b) 内函数的单调性与导数有如下关系:

导数	函数的单调性
$f'(x)>0$	单调递增
$f'(x)<0$	单调递减
$f'(x)=0$	常函数

【学习任务单】

导函数不一定存在零点, 如何处理?

例: (1) 求函数 $f(x) = e^x - ax - 2$, $a \in \mathbf{R}$ 的单调性.

(2) 当 $x \in (0,1)$, 求函数 $f(x) = e^x - ax - 2$, $a \in \mathbf{R}$ 的单调性.

(1) 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = e^x - a$, 令 $f'(x) = e^x - a = 0$

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调递增;

(2) 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = e^x - a = 0$, 得 $x = \ln a$, 列表分析如下

x	$(-\infty, \ln a)$	$\ln a$	$(\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓		↑

在 $(\ln a, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-\infty, \ln a)$ 上, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减。

综上所述: 当 $a \leq 0$ 时, 递增区间: $(-\infty, +\infty)$, 无递减区间;

当 $a > 0$ 时, 递增区间: $(\ln a, +\infty)$, 递减区间: $(-\infty, \ln a)$ 。

小结：含参函数单调性讨论的依据：导函数是否存在零点。

(2)【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$ ， $f'(x)=e^x-a$ ，

(1)当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是单调递增；

(2)当 $a > 0$ 时，令 $f'(x)=e^x-a=0$ ，得 $x=\ln a$ ，

①若 $\ln a \leq 0$,即 $0 < a \leq 1$ 时,列表分析如下：

x	$(0,1)$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↑

在 $(0,1)$ 上， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是单调递增；

②若 $0 < \ln a < 1$,即 $1 < a < e$ 时,列表分析如下：

x	$(0, \ln a)$	$\ln a$	$(\ln a, 1)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	极大值	↑

在 $(\ln a, 1)$ 上， $f'(x) > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增，

在 $(0, \ln a)$ 上， $f'(x) < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减。

③若 $\ln a \geq 1$,即 $a \geq e$ 时，列表分析如下：

x	$(0,1)$
$f'(x)$	-
$f(x)$	↓

在 $(0,1)$ 上， $f'(x) < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减。

综上所述：

当 $a \leq 1$ 时，递增区间： $(0,1)$ ，无递减区间；

当 $1 < a < e$ 时，递增区间： $(\ln a, 1)$ ，递减区间： $(0, \ln a)$ ；

当 $a \geq e$ 时，无递增区间，递减区间： $(0,1)$ 。

小结：含参函数单调性讨论的依据：

(1) 导函数是否存在零点。

(2) 零点是否在给定区间内。

例：已知函数 $f(x) = (x-2)e^x - \frac{1}{2}a(x^2 - 2x)$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ ；讨论 $f(x)$ 的单调性；

解：定义域： $(-\infty, +\infty)$ ， $f'(x) = (x-1)e^x - a(x-1) = (x-1)(e^x - a)$ 。令 $f'(x) = 0$

(1) 当 $a \leq 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x=1$ ，列表分析如下：

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↑

在 $(-\infty, 1)$ 上， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

在 $(1, +\infty)$ 上， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增。

(2) 当 $a > 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x=1$ 或 $x=\ln a$ 。

①若 $\ln a < 1$ 即 $0 < a < e$ 时，列表分析如下：

x	$(-\infty, \ln a)$	$\ln a$	$(\ln a, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

在 $(\ln a, 1)$ 上， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

在 $(-\infty, \ln a)$ 与 $(1, +\infty)$ 上， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增。

②若 $\ln a = 1$ 即 $a = e$ 时， $f'(x) \geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增。

③若 $\ln a > 1$ 即 $a > e$ 时，列表分析如下：

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \ln a)$	$\ln a$	$(\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

在 $(1, \ln a)$ 上， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

在 $(-\infty, 1)$ 与 $(\ln a, +\infty)$ 上， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增。

综上所述

当 $a \leq 0$ 时，增区间： $(1, +\infty)$ ，减区间： $(-\infty, 1)$ ；

当 $0 < a < e$ 时，增区间： $(-\infty, \ln a)$ ， $(1, +\infty)$ ，减区间： $(\ln a, 1)$ ；

当 $a = e$ 时，增区间： $(-\infty, +\infty)$ ，减区间：无；

当 $a > e$ 时，增区间： $(-\infty, 1)$ 与 $(\ln a, +\infty)$ ，减区间： $(1, \ln a)$ 。

小结：含参函数单调性讨论的依据：

(1) 导函数是否存在零点。

(2) 零点大小关系。

归纳小结

1. 含参函数单调性讨论的依据：

(1) 导函数是否存在零点；

(2) 零点是否在定义域内；

(3) 零点的大小关系。

2. 分类结论要整合；

3. 不重不漏。