函数的性质进一步研究第 11 课时--课后作业答案

1. 已知 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-x^2+ax-1\ \ (a\in R)$，讨论 $f(x)$ 的单调性。

解：定义域：R

$f'(x)=ax^2-2x+a$

（1）当 $a=0$ 时，$f'(x)=-2x$，令 $f'(x)=0$，则 $x=0$.

x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

（2）当 $a\neq 0$ 时，$\Delta=4-4a^2$

①当 $\Delta\le 0$ 时，$a\ge 1$ 或 $a\le -1$.

（i）当 $a\ge 1$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

（ii）当 $a\le -1$ 时，$f'(x)\le 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减.

②当 $\Delta>0$ 时，$-1<a<0$ 或 $0<a<1$，$x_1=\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},x_2=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$.

（i）当 $0<a<1$ 时，$x_1<x_2$.

x	$(-\infty,x_1)$	(x_1,x_2)	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$、$(x_2,+\infty)$ 单调递增，在 (x_1,x_2) 单调递减.

（ii）当 $-1<a<0$ 时，$x_1>x_2$.

x	$(-\infty,x_2)$	(x_2,x_1)	$(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	-	+	-

$f(x)$	↘	↗	↘

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,x_2\right)$ 、$(x_1,+\infty)$ 单调递减，在 (x_2,x_1) 单调递增.

综上，当 $a\le -1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递减.

当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty\right)$ 单调递减， 在 $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$ 单调递增.

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 单调递增，在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty\right)$ 单调递增， 在 $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$ 单调递减.

当 $a\ge 1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递增.

2. 已知 $f(x)=ax^2+(1-2a)x-\ln x \quad (a\in R)$，讨论 $f(x)$ 的单调性。

解：定义域：$\left(0,+\infty\right)$.

$$f'(x)=2ax+\left(1-2a\right)-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{2ax^2+(1-2a)x-1}{x}$$

（1）当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=1$.

x	$\left(0,1\right)$	$\left(1,+\infty\right)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

（2）当 $a \neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{(2ax+1)(x-1)}{x}$，令 $f'(x)=0$，则 $x_1=-\dfrac{1}{2a}$，$x_2=1$.

①当 $-\dfrac{1}{2a}>1$，即 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，

x	$(0,1)$	$\left(1,-\frac{1}{2a}\right)$	$\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$、$\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 单调递减，在 $\left(1,-\dfrac{1}{2a}\right)$ 单调递增.

②当 $-\dfrac{1}{2a}=1$，即 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)\leq 0$ 恒成立.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

③当 $0<-\dfrac{1}{2a}<1$，即 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，

x	$\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$	$\left(-\frac{1}{2a},1\right)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$、$(1,+\infty)$ 单调递减，在 $\left(-\dfrac{1}{2a},1\right)$ 单调递增.

④当 $-\dfrac{1}{2a}\leq 0$ 时，$a>0$.

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$、$(1,+\infty)$ 单调递减，在 $\left(-\dfrac{1}{2a},1\right)$ 单调递增.

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减.

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$、$\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 单调递减，在 $\left(1,-\frac{1}{2a}\right)$ 单调递增.

当 $a\geq 0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.