高二数学函数的性质进一步研究第10课时学习指南

学习目标：

1.进一步熟练导数的运算；

2.进一步熟练掌握利用导数解决曲线的切线问题.

学法指导：

导数的几何意义：$P(x_0, y_0)$ 为曲线 $y=f(x)$上一点，函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$处的导数就是经过点 P 曲线的切线斜率，即$k=f'(x_0)$，抓住解决曲线切线问题的关键——切点.

学习任务：

知识点复习：

1. 几种常见基本初等函数的导数公式：

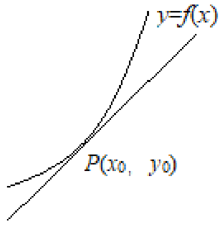
函数	导数
$y=c$	$y'=0$
$y=x^n(n\in\mathbf{Q}^*)$	$y'=nx^{n-1}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=f(x)=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a\,(a>0)$
$y=f(x)=e^x$	$y'=e^x$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0\text{ 且}a\neq1)$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

2.导数运算法则：

导数运算法则
1. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$ 2. $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)\pm f(x)g'(x)$ 3. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq0)$

3. 导数的几何意义：

$P(x_0, y_0)$ 为曲线 $y=f(x)$上一点，函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数就是曲线经过点 P 的切线斜率，即$k = f'(x_0)$.



例 1 曲线 $y=\dfrac{x}{x+2}$ 在点 $\left(-1,-1\right)$ 处的切线方程为（　　）

（A） $y=2x+1$　　（B） $y=2x-1$　　（C） $y=-2x-3$　　（D） $y=-2x-2$

【答案】A

本题主要考查函数的求导法则，导数的几何意义，直线方程.

【解析】 $y'=\dfrac{2}{(x+2)^2}$，且点 $\left(-1,-1\right)$ 在曲线上

所以切线的斜率为 $y'\big|_{x=-1}=\dfrac{2}{(-1+2)^2}=2$，

切线方程为 $y-(-1)=2\left[x-(-1)\right]$ ，即 $y=2x+1$.

例 2 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+x+b(a\geq 0)$，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数. 设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点为 A，曲线 $y=f(x)$在 A 点处的切线方程是 $y=3x-3$，求 a,b 的值.

【解析】因为 $f(x)$的图象与 x 轴交点为 A，且曲线 $y=f(x)$在 A 点处的切线方程是 $y=3x-3$

所以 $A(1, 0)$，且 $k=f'(1)=3$

$f'(x)=x^2+ax+1$

所以$\begin{cases}\frac{1}{2}a+b+\frac{4}{3}=0\\ a+2=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=1\\ b=-\frac{11}{6}\end{cases}$

例 3 经过原点且与曲线$y=e^x$相切的直线方程为________________.

【解析】如图可知，原点 O 不在曲线$y=e^x$上，即 O 不是切点

设切点为 $P(x_0, y_0)$，则有$y_0=e^{x_0}$

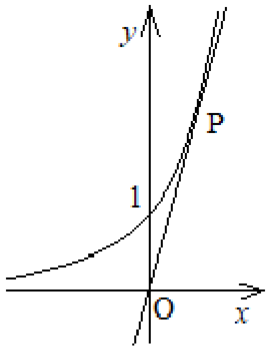
所以 $k=f'(x_0)=e^{x_0}$

又因为切线过原点，则切线方程为：$y=kx=e^{x_0}\cdot x$

又切点 P 在切线上，则有：$y_0=e^{x_0}\cdot x_0=e^{x_0}$

所以$\begin{cases}x_0=1\\ y_0=e\end{cases}$

所以，切线方程为：$y=ex$.



例 4 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=a\ln x$，$a\in\mathrm{R}$.若曲线 $\mathrm{y}=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 相交，且在交点处有相同的切线，求 a 的值及该切线的方程.

【解析】两条曲线的交点（切点）的坐标为$(x_0，y_0)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\dfrac{a}{x}$ $(x>0)$，

由已知得$\begin{cases}\sqrt{x_0}=a\ln x_0\\ k_1=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{a}{x_0}=k_2\end{cases}$，解得 $a=\dfrac{e}{2}$，$x_0=e^2$，

∴ 两条曲线交点的坐标为(e^2,e)，切线的斜率为$k=f'(\mathrm{e}^2)=\dfrac{1}{2e}$，

∴切线方程为：$y-e=\frac{1}{2e}(x-e^2)$，即$y=\frac{1}{2e}x+\frac{e}{2}$.