

复数的加减、运算及其几何意义

学习任务单

一、学习目标

1. 由多项式加法运算类比得出复数的加法法则, 由实数减法是实数加法的逆运算类比得出复数减法运算法则, 由向量加减法运算的几何意义类比得出复数加减法运算的几何意义, 以提高学生的类比推理能力和数学运算的核心素养;

2. 掌握复数加减法运算法则, 会求复数对应的两点之间的距离, 能够利用“数形结合”的思想解题;

3. 引导学生积极思考, 主动探索, 自动自发的投入到学习中, 让学生感悟数学知识之间的关联, 加强对数学整体性的理解.

二、学法指导

复数的加法与减法运算中, 重点是加法。通过类比多项式加法, 教材规定了复数加法法则, 我们要从以下几个方面理解这个规定的合理性: 1) 当 $b=0$ 且 $a \neq 0$ 时, 与实数加法法则一致。2) 验证实数加法运算律在复数集中仍然成立; 3) 符合向量加法的平行四边形法则。对于复数的减法重点在于理解复数减法是加法的逆运算。理解利用复数相等得出复数减法的运算法则的过程。

一、复习引入

1. 虚数单位 i , 它的平方等于 -1 , 即 $i^2 = -1$

2. 对于复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$

当且仅当 $b = 0$ 时, z 是实数 a .

当 $b \neq 0$ 时, z 为虚数.

当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, z 为纯虚数

当且仅当 $a = b = 0$ 时, z 就是实数 0 .

3. 复数集与其它数集之间的关系: $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

4. 复数的几何意义:

复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复平面内的点 } Z(a, b)$

复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{平面向量 } \overrightarrow{OZ}$

二、复数加法

探究一：复数的加法

请同学们化简两个多项式相加：

1. $(2 + x^2) + (3x^2 + 4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

$(a + bx^2) + (dx^2 + c) = \underline{\hspace{2cm}}$.

类比多项式加法，我们规定，

复数的加法法则如下：设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$

是任意两个复数，那么他们的和 $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

请同学们思考以下 3 个问题：

3. 两个复数的和是个什么数，它的值唯一确定吗？

4. 当 $b = 0, d = 0$ 时，与实数加法法则一致吗？

5. 规定的运算实质是什么？类似于实数运算的那种运算方法？

学生回答：

探究二：复数加法满足交换律、结合律吗？请同学们思考并完成证明过程

设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, z_3 = e + fi (a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R})$

探究数的加法交换律：

6. $z_1 + z_2 = \underline{\hspace{2cm}}, z_2 + z_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

可知： $z_1 + z_2 \underline{\hspace{1cm}} z_2 + z_1$. 说明复数加法满足 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

探究数的加法结合律：

7. $(z_1 + z_2) + z_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

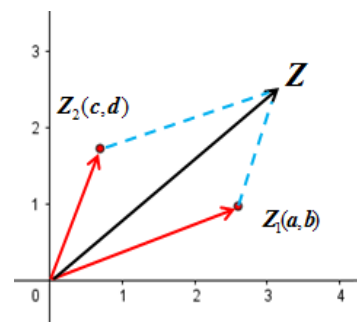
$z_1 + (z_2 + z_3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

可知： $(z_1 + z_2) + z_3 \underline{\hspace{1cm}} z_1 + (z_2 + z_3)$. 说明复数加法满足 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

复数加法的几何意义

我们知道，复数与复平面内以原点为起点的向量

一一对应，设 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $a + bi, c + di$ 对应，



则 $\overrightarrow{OZ_1} = (a, b), \overrightarrow{OZ_2} = (c, d)$ 。由平面向量的坐标运算

法则，得 $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = (a + c, b + d)$ 。

这说明两个向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的和就是与复数 $(a + c) + (b + d)i$ 对应的向量。

因此，两个复数的加法：可以按照向量的加法来进行，这就是复数加法的几何意义。

例 1：已知 $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -3 + i$ ，求 $z_1 + z_2$ 。

三、复数减法

类比实数减法的意义，实数减法是实数加法的逆运算，

我们规定，复数减法是加法的逆运算，即把满足

$(c + di) + (x + yi) = a + bi$ 的复数 $x + yi (x, y \in \mathbf{R})$ 叫做

复数 $a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 减去复数 $c + di (c, d \in \mathbf{R})$ 的差，

记作 $(a + bi) - (c + di)$

下面我们来推导 $x + yi$ 等于什么？

因为 $(c + di) + (x + yi) = a + bi$ ，根据复数相等的含义，

所以得到 $c + x = a, d + y = b$

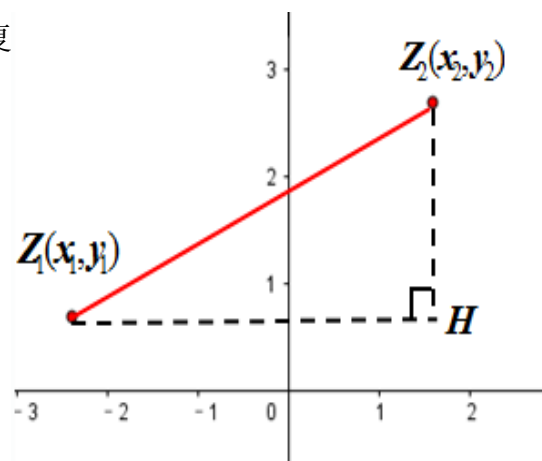
$$x = a - c, y = b - d$$

$$x + yi = (a - c) + (b - d)i$$

即 $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

由此可见两个复数的差是一个确定的复数，两个复式相减。

例 2：已知 $z_1 = -2 - 3i, z_2 = 3 + i$ ，求 $z_1 - z_2$ 。



例 3: 已知: 复数 $Z_1 = x_1 + y_1i$, $Z_2 = x_2 + y_2i$

求复平面内的两点 $Z_1(x_1, y_1)$, $Z_2(x_2, y_2)$ 之间的距离

类比复数加法的几何意义, 我们来研究复数减法的几何意义

我们知道, 复数与复平面内以原点为起点的向量一一对应,

设 $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $x_1 + y_1i$, $x_2 + y_2i$ 对应

则 $\overrightarrow{OZ_1} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OZ_2} = (x_2, y_2)$ 。由平面向量的坐标运算法则,

得 $\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. 这说明向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 减去 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的差就是与复数

$(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i$ 对应的向量。两个复数的减法: 可以按照向量减法来进行,

这就是复数减法的几何意义。

四、课堂小结

本节课我们一起学习了复数加(减)法运算法则(主要是复数代数形式的加(减)法运算法则)。

1. 复数加(减)法法则的合理性: 它既与实数运算法则, 运算律相同, 又与将来我们要学习的向量完美地结合起来。
2. 复数加(减)法实质是: 复数的实部与实部、虚部与虚部分别相加(减)。

【*】拓展:

1. 判断正误, 正确的画√, 错误的画×

1). 两个虚数的和或差可能是实数。 ()

2). 在进行复数的加法时, 实部与实部相加得实部, 虚部与虚部相加虚部。 ()

3). 复数与复数相加(或相减)后的结果只能是实数。 ()

4). 关于复数的减法的结论 $(z_1 - z_1) - z_3 = z_1 - (z_1 + z_3)$ 可能不成立。 ()

5).复数 z 是实数的充要条件是 $z = \bar{z}$ 。 ()

2. 若 $|z-1|=|z+1|$, 则复数 z 对应的点 Z 在 ()

A.在是轴上 B.在虚轴上 C.第一象限 D.第二象限

3. $\triangle ABC$ 的三个顶点对应的复数分别为 z_1, z_2, z_3 ,

复数 z 满足 $|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|$, 则 z 对应的点是 $\triangle ABC$ 的 ()

A.外心 B.内心 C.重心 D.垂心

4. 已知 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $|z_1|=|z_2|=1$, $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$, 求 $|z_1-z_2|$ 。

5.已知 $z \in \mathbf{C}$ 且 $|z|=1$, 则 $|z+2-i|$ (i 为虚数单位) 的最小值为_____。

6. 请同学们利用复数加、减法的几何意义证明以下结论

在复平面内, z_1, z_2 对应的点分别为 A, B , z_1+z_2 对应的点分别为 C, O 为坐标原点

(点 O, A, B 不共线)

1). 四边形 $OACB$ 为平行四边形。

2). 若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 则四边形 $OACB$ 为矩形。

3). 若 $|z_1|=|z_2|$, 则四边形 $OACB$ 为菱形。

4). 若 $|z_1|=|z_2|$ 且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 则四边形 $OACB$ 为正方形

编者注: 带【*】的内容, 初学有难度, 为选学培优要求, 视频 2 里有讲解. 本课时请重点学习常规内容(视频 1)。