高一数学第31讲 数与形的桥梁学习指南答案

一、学习目标：

1.理解复数的几何意义，能够类比实数的几何意义得出复数的点表示，并能够在复数的点表示基础上结合复数相等的概念整体认识复数的向量表示.

2.能从形与数两个角度认识复数的模以及共轭复数. 会求复数的模以及共轭复数.

3．感悟“类比”、 “化归与转化”、“数形结合”等思想方法.

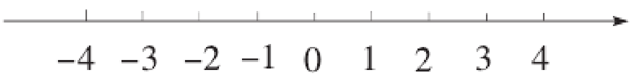
二、学法指导：

我们在前一节课学习了复数的概念，可能大家都跟原来的数学家一样，觉得虚数是“虚幻”的数，那么这一节课，我们将类比实数，探索复数的几何意义，大家要在积极思考的前提下，了解复数发展的历史过程，激发勇于探索、创新的精神，明确复数的几何意义，这样有助于大家对复数的理解和应用。

三、学习过程：

任务一：请大家回忆一下实数的几何意义是什么呢？

没错，实数可以用数轴上的点来表示.也就是说实数与数轴上的点是一一对应的.而也正是因为这种一一对应,我们才可以把每一个实数,用数轴上的点(几何意义)来表示.数轴上的点就是实数的几何模型,也就是实数的几何意义之一.



任务二：请大家回忆实数与复数之间的关系是什么？

对于复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,当虚部$b=0$时，复数$z=a$为实数，也就是说实数是复数的一种特殊情况.

任务三：类比实数，探究复数是否能也用点来表示？如果可以的话，该怎么表示呢？

由复数相等的概念可知，任何一个复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$都是由两个实数$a,b$唯一确定的，由于$a,b$分别对应了复数的实部，虚部，所以实际上复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$的本质是一对有序实数对；基于有序实数对可以看成是平面直角坐标系中点的坐标，因此我们构建这样的平面直角坐标系，使得坐标系中的点的横坐标表示复数的实部，纵坐标表示复数的虚部．这样就使得在这样的平面直角坐标系中，都有唯一个点(a,b)与有序数对(a,b)一一对应，而有序数对(a,b)又与

$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 一一对应，这样我们通过有序实数对，建立复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 和点 $Z(a,b)$ 之间的一一对应关系。

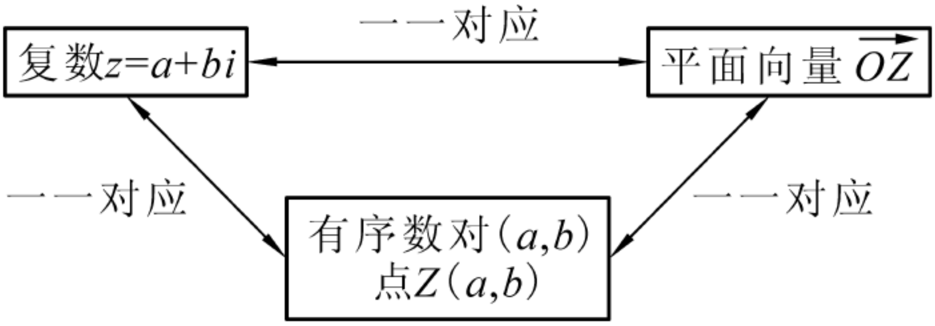
由此可知，复数集 $\mathbf{C}$ 中的数与复平面内的点按如下方式建立了一一对应关系，复平面中的点 $Z(a,b)$ 是复数 z 的几何表示。

$$\text{复数 } z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R}) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{有序实数对 } (a,b) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{点 } Z(a,b)$$

建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面。在复平面内 x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴。实轴与虚轴的交点叫做原点，原点（0，0）对应复数 0。显然，实轴上的点都表示实数，除原点外，虚轴上的点表示纯虚数。

另外如果我们以原点为起点，$Z(a,b)$ 为终点，连接有向线段 $\overrightarrow{OZ}$（也就是我们之后要学习的向量），显然向量 $\overrightarrow{OZ}$ 由点 Z 唯一确定，反过来，点 Z 可以由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定，因此有序实数对 (a,b) 也可以看成是平面直角坐标系中向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标，也就是说向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与有序实数对 (a,b) 一一对应，因此这样我们通过有序实数对和 $Z(a,b)$，建立复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 之间的一一对应关系。

由此可知，复数集 $\mathbf{C}$ 中的数与复平面内以原点为起点的向量建立了一一对应关系，复平面中的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是复数 z 的另一种几何表示。之后我们也将利用复数与向量之间一一对应的关系，从几何的角度阐述了复数的几何加法与乘法。至此，复数理论才比较完整和系统地建立起来了。



为了方便起见，我们常把复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 说成点 Z 或说成向量 $\overrightarrow{OZ}$，并规定，相同的向量表示同一个复数。

任务四：类比实数，猜想 $|z|$ 表示的涵义。

没错，$|z|$也表示的是点Z到原点的距离，也就是有向线段（向量）$\overrightarrow{OZ}$的长度（我们也称作向量的模）。

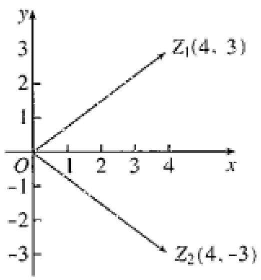
设复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$，则向量$\overrightarrow{OZ}$的长度叫做复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$的模（或绝对值），记作$|z|$或者$|a+b\mathrm{i}|$，如果$b=0$，则$|a+b\mathrm{i}|=|a|$，这表明复数绝对值是实数绝对值概念的推广。由长度的计算公式，可知$|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$

例 1. 设复数$z_1=4+3\mathrm{i},z_2=4-3\mathrm{i}$

（1）在复平面内画出复数z_1,z_2对应的点和向量；

（2）求复数z_1,z_2的模，并比较他们的大小。

（1）如图，复数z_1,z_2对应的点分别为Z_1,Z_2，所对应的向量分别为$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$



（2）$|z_1|=|4+3\mathrm{i}|=\sqrt{4^2+3^2}=5,|z_2|=|4-3\mathrm{i}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，所以$|z_1|=|z_2|$

一般地：两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数. 虚部不等于0的两个共轭复数也叫做共轭虚数，复数z的共轭复数记做$\bar{z}$，即：如$z=a+b\mathrm{i}$，那么$\bar{z}=a\text{-}b\mathrm{i}$

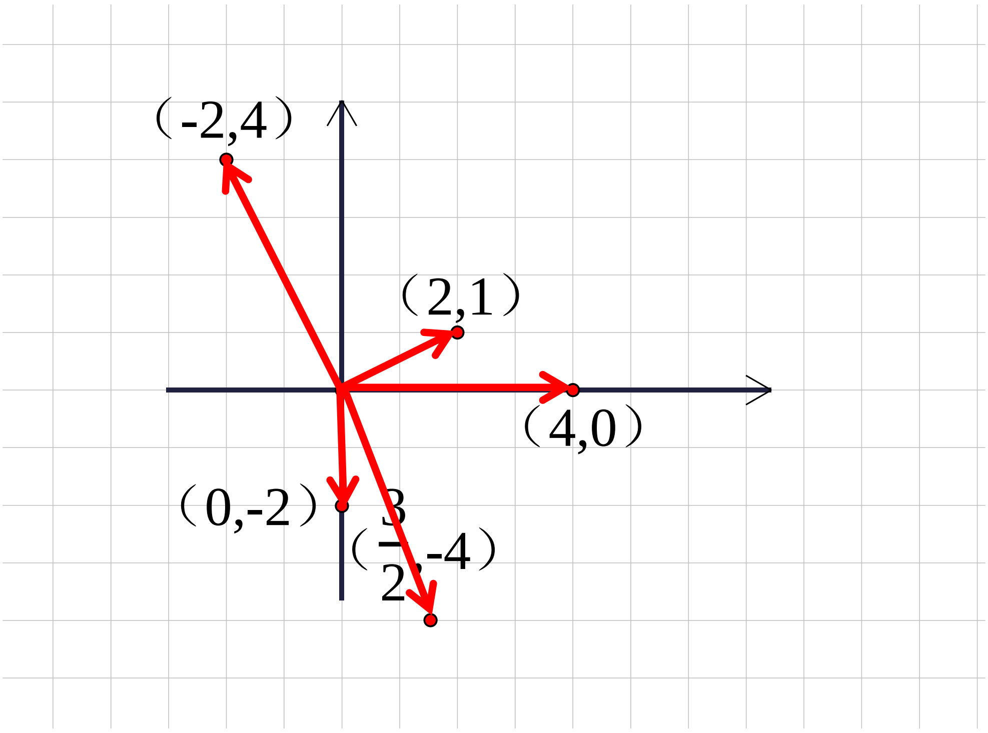
思考 :若z_1,z_2是共轭复数，那么对应的点有什么特点？关于实轴对称

练习：1. 已知复数$2+\mathrm{i}$，$-2+4\mathrm{i},-2\mathrm{i},4,\dfrac{3}{2}-4\mathrm{i}$

（1）在复平面内画出这些复数对应的向量；

（2）求出这些复数的模.

（1）如下图



（2）$\sqrt{5}$，$2\sqrt{5}$，2，4，$\frac{\sqrt{73}}{2}$

例 2. 设 $z\in\mathbf{C}$，在复平面内 z 对应的点为 Z，那么满足下列条件的 Z 的集合是什么图形

（1）$|z|=1$，（2）$1<|z|<2$

解：（1）法一：由复数的几何意义可知，$|z|=1$，即有向线段 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度为 1，即表示点 Z 到到原点 O 的距离为 1，所以点 Z 的集合为以原点 O 为圆心，以 1 为半径的圆。

法二：由复数模的计算公式可得，若设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，因为 $|z|=1$，所以 $\sqrt{a^2+b^2}=1$，即 $a^2+b^2=1$，这里的 a 是点 Z 的横坐标，我们习惯写为 x，这里的 b 是点的纵坐标，我们习惯上写为 y，所以 $a^2+b^2=1$ 也就是我们原来见过的 $x^2+y^2=1$，即以原点为圆心，1 为半径的单位圆方程。而点 Z 就是单位圆上的点。

（2）不等式 1<|z|<2 可以化为不等式组 $\begin{cases}1<|z|\\|z|<2\end{cases}$

不等式$1<|z|$的解集是圆$|z|=1$外部所有的点构成的集合.

不等式$|z|<2$的解集是圆$|z|=2$内部所有的点构成的集合。

这两个集合的交集就是上述不等式组$\begin{cases}1<|z|\\|z|<2\end{cases}$的解集。

也就是满足条件的点Z的集合，因而所求的集合是以原点O为圆心，以 1 和 2 为半径的两圆所加的圆环，不包括圆环的边界。

小结：

本节课主要学习了复数的几何意义，一是用复平面内的点表示复数；二是复数的模就是复数所对应点到原点的距离；复数 z 的几何表示又一次沟通了代数与几何的联系，也为我们用向量方法解决复数问题或用复数方法解决向量问题创造了条件.

【*】1．给出下列命题，其中是真命题的是_____________

A．纯虚数 z 的共轭复数是$-z$

B．复数的模一定是正实数

C．复数的模为 0 则这个复数为零

D 在复平面内，虚轴上的点所对应的复数都是纯虚数

E 两个复数的模相等是这两个复数相等的必要条件

【答案】ACE

【解析】A．根据共轭复数的定义，显然是真命题；

B．由$\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}$，易得$\left|z\right|\geq 0$，当$z=0$，$\left|z\right|=0$，显然是假命题；

C．由 B 可知若$\left|z\right|=0$则$\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}$，只能$a=b=0$即$z=0$，显然是真命题；

D 应该是除原点外，虚轴上的点所对应的复数都是纯虚数，显然是假命题；

E. 显然两个复数相等可以推出这两个复数的模相等，显然是真命题。

【*】2．若复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$对应的点在实轴上，则实数 m 的值是(　　)

A．－1　　　　　　　　　　　　B．4

C．－1 和 4　　　　　　　　　D．－1 和 6

【答案】D

【解析】复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)$i 所对应的点的横坐标为 m^2-3m-4，纵坐标为 m^2-5m-6，又因为这个点在实轴上，所以纵坐标为 0，即 $m^2-5m-6=0$ 得 m＝6 或－1，故选 D.

【*】3．若 a、$b\in\mathbf{R}$，则复数$(a^2-6a+10)+(-b^2+4b-5)$i 对应的点在(　　)

A．第一象限　　　　　　B．第二象限

C．第三象限　　　　　　D．第四象限

【答案】D

【解析】$a^2-6a+10=(a-3)^2+1>0$，$-b^2+4b-5$

$=-(b-2)^2-1<0$.所以对应点在第四象限，故应选 D.

【*】4.“z_1,z_2 互为共轭复数”是“$|z_1|=|z_2|$”（　　）

A 充分不必要条件　　　　　　B 必要不充分条件

C 充要条件　　　　　　　　　D 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】首先先看充分性：

从代数角度：因为 z_1,z_2 互为共轭复数，不妨设 $z_1=a+b\mathrm{i}$ $z_2=a-b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathrm{R}$ 那么 $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z_2|=\sqrt{a^2+(-b)^2}$，即$|z_1|=|z_2|$，所以“z_1,z_2 互为共轭复数”是“$|z_1|=|z_2|$”的充分条件

从几何角度：z_1,z_2 互为共轭复数，所以他们所对应的点关于实轴对称，因此这两个点到原点的距离相等，因此$|z_1|=|z_2|$，同样“z_1,z_2 互为共轭复数”是“$|z_1|=|z_2|$”的充分条件

其次再看必要性：

从代数角度：首先不妨设 $z_1=a+b\mathrm{i}$　$z_2=c+d\mathrm{i}$，a，$b,c,d\in\mathrm{R}$　那么$|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$，

$|z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$，因为$|z_1|=|z_2|$，所以$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2+d^2}$，即$a^2+b^2=c^2+d^2$，但是得不出$a=c$且$b=-d$，所以“$z_1,z_2$互为共轭复数”不是“$|z_1|=|z_2|$”的必要条件

从几何角度：因为$|z_1|=|z_2|$，所以这两个复数所对应的点到原点的距离相等，也就是说他们在同一个圆上，但是圆上的点有无数个，不一定能得到这两个点关于实轴对称，所以z_1,z_2不一定为共轭复数，同样“z_1,z_2互为共轭复数”不是“$|z_1|=|z_2|$”的必要条件

【*】5.已知复数$z=3+a\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$，i为虚数单位），且$|z|<4$，求实数a的取值范围

【答案】$a\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$

思路一：由模长公式，将复数问题化为实数不等式问题解决，思路2：借助平面图形，利用复数的几何意义求解

【解析】解法一：由$z=3+a\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$，i为虚数单位），则$|z|=\sqrt{3^2+a^2}$，由已知得$\sqrt{3^2+a^2}<4$，解得$a^2<7$，即$-\sqrt{7}<a<\sqrt{7}$，即$a\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$

解法二：利用复数的几何意义，由$|z|<4$知，z在复平面内对应的点Z在以原点为圆心，4为半径的圆内（不包括边界），又由$z=3+a\mathrm{i}$知其对应的点Z在直线$x=3$上，所以线段AB(除去端点)，为动点Z的集合，由图可知$a\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$

编者注：带【*】的内容，初学有难度，为选学培优要求，视频2里有讲解，本课时请重点学习常规内容