数系的发展---学习指南

一、学习目标：

1．通过方程求解，理解引入复数的必要性，了解复数系的扩充过程，体会数系扩充过程中理性思维的作用，提升逻辑推理素养；

2．理解复数的代数表示以及虚数、纯虚数的概念，并能够做出正确判断；

3．理解两个复数相等的含义，知道此处不仅给出了判断两个复数是否相等的依据，也给出了求某些复数值的依据，即利用复数相等的含义，可以得到关于实数a,b的方程（组），通过解方程（组）得到a,b的值．

二、学法指导：

我们在初中学习了解一元二次方程，由于负数不能开平方，有的一元二次方程没有解，通过对数系的发展过程的了解，要使方程有解，必须扩充实数集．通过回顾数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部矛盾在数系扩充过程中的作用．通过尝试构造新数，归纳出复数的代数表示方法．感受数学发展的美，体会数系的发展是遇到矛盾，解决矛盾的一个过程，激发勇于探索、创新的精神，提高归纳总结的能力．

三、学习过程：

一、 概念形成过程

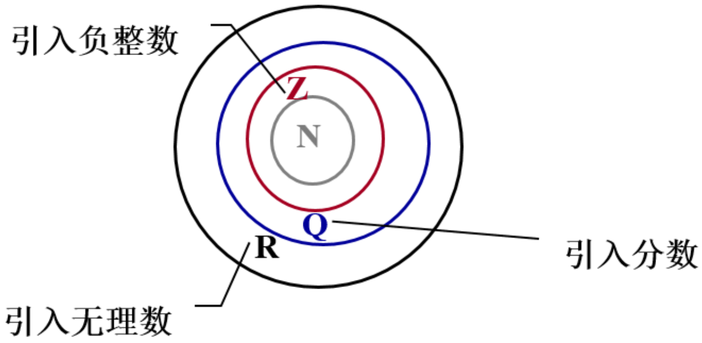
同学们，“数”我们并不陌生，你知道数是如何发展成为为今天这个模样的吗？让我们一起揭开它神秘的面纱．

我们知道了数的发展是为了满足社会生产实践的需要．由于自然数不能刻画具有相反意义的量，于是引入负整数，将自然数集扩充到整数集；由于整数集不能解决测量中的等分问题，于是引入分数，将整数集扩充到有理数集；由于有理数集不能解决正方形对角线长问题，于是引入无理数，将有理数集扩充到实数集．

从数学内部发展来看，数的发展也是为了满足运算的需要．

1. 在自然数范围内解方程：$x+4=0$，为了解决$\mathbf{N}$中减法不总能实施的问题，引入负整数；
2. 在整数范围内解方程：$3x=2$，为了解决$\mathbf{Z}$中除法不总能实施的问题，引入分数；
3. 在有理数范围内解方程：$x^2=2$，为了解决$\mathbf{Q}$中正数开方不总能实施的问题，引入无理数．

通过图表分析运算对数的发展的影响：



回顾了从自然数集 $\mathbf{N}$ ——整数集 $\mathbf{Z}$ ——有理数集 $\mathbf{Q}$ ——实数集 $\mathbf{R}$ 的三次扩充过程.

通过三次扩充，请同学们归纳一下扩充的过程中必须满足的共同规则：

（1）解决某些运算在原数集中不是总可以实施的矛盾；

（2）原数集$\subsetneqq$新数集；

（3）在新的数集中，原有的运算及性质仍然适用.

数系已经进行了三次扩充，数系能不能再次扩充呢？

引入本节内容.

问题 1：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 没有实数根，如果要使方程有解需要解决什么问题？

答：负实数可以开平方，事实上，数学家在研究解方程问题时早就遇到了负实数的开平方问题，但他们一直在回避．到 16 世纪，数学家在研究实系数一元三次方程的求根公式时，再也无法回避这个问题了.

问题 2：从方程的角度看，负实数能不能开平方，就是方程 $x^2=-a(a>0)$ 是否有解，也就是 $x^2+a=0$ 是否有解的问题，思考一下，能不能把这类问题再进一步简化，最终转化为最简单的方程 $x^2+1=0$ 是否有解的问题呢？

将方程 $x^2+a=0$ 两边同除以 a，可得 $\dfrac{x^2}{a}+1=0$，即 $(\dfrac{x}{\sqrt{a}})^2+1=0$．令 $y=\dfrac{x}{\sqrt{a}}$，则 $x^2+a=0$

可以转化为 $y^2+1=0$．因此，$x^2+a=0$ 有没有解，就可以归结为 $x^2+1=0$ 有没有解.

我们知道，$x^2+1=0$ 在实数集中无解，联系从自然数集到实数集的扩充过程，是否能引入新数，适当扩充实数集，使这个方程在新数集中有解．引入什么数，如何扩充实数集？这就是我们今天所要研究的问题.

问题 3：可以看出，数集的每一次扩充，都是在原来数集的基础上添加“新数”得到的，引入新数就要引入新运算，如果没有运算，数集中的数只是一个个孤立的符号．加法和乘法运算是上述数系中最基本的运算．梳理从自然数系逐步扩充到实数系的过程，数系的每一次扩充，加法和乘法运算满足的“性质”有一致性吗？由此你能梳理数系扩充遵循的“规则”吗？

“规则”是：数集扩充后，在新数集中规定的加法运算和乘法运算，与原来数集中规定的加法和乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律．

解决负数开方问题的关键是解决 -1 开方的问题．引入一个什么样的数呢？使得它是 $x^2+1=0$ 的解，即它的平方为 -1．

二、 概念讲授过程

1．虚数单位的引入

引入一个新数 i，叫作虚数单位，并规定：

（1）$\mathrm{i}^2=-1$；

（2）实数可以与 i 进行四则运算，进行四则运算时，原有的加法、乘法运算律仍然成立．

i 是数学家欧拉最早引入的，它取自 imaginary（想象的，假想的）一词的词头．$\mathrm{i}^2=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}$．

问题 4：把新引进的数添加到实数集中后，我们希望按照前面总结的数系扩充的“规则”，对实数系进行进一步扩充．那么，实数系经过扩充后，得到的新数系由哪些数组成？

类比有理数系扩充到实数系的过程与方法，如 $2\sqrt{2}$，$2+\sqrt{3}$ 等，以及实数系中新数的形式，将实数与 i 进行加法和乘法运算，例如：把实数 1 与新引入的数 i 相加可以得到 $1+\mathrm{i}$；把实数 3 与新引入的数 i 相乘可以得到 $3\mathrm{i}$；把实数 1 与实数 3 和 i 相乘的结果相加可以得到 $1+3\mathrm{i}$．

问题 5：你能写出一个形式，把刚才的举例中的数都包含在内，并说明理由吗？

把实数 a 与新引入的数 i 相加可以得到 $a+\mathrm{i}$；把实数 b 与新引入的数 i 相乘可以得到 $b\mathrm{i}$；把实数 a 与实数 b 和 i 相乘的结果相加可以得到 $a+b\mathrm{i}$；所有新数集中的数都可以写成 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式，例如 $a=a+0\cdot\mathrm{i}$，$b\mathrm{i}=0+b\mathrm{i}$，$\mathrm{i}=0+1\cdot\mathrm{i}$．

2. 复数的定义

形如 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的数称为复数，通常用字母 z 表示, 其中 a 叫做复数的实部，b 叫做复数的虚部.

全体复数组成的集合叫复数集，通常用 $\mathbf{C}$ 表示，即 $\mathbf{C}=\left\{a+b\mathrm{i}\,\middle|\,a,b\in\mathbf{R}\right\}$.

注意：复数的实部与虚部都是实数.

概念辨析 1.

写出下列复数的实部与虚部，你能给下列复数分分类吗？

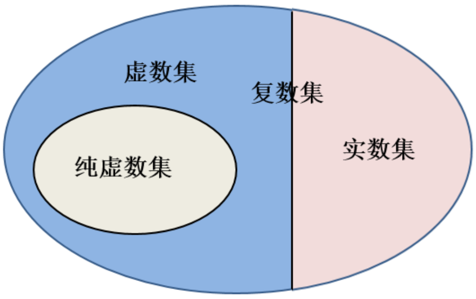
（1）4；（2）$2-3\mathrm{i}$；(3) $5\mathrm{i}+\sqrt{2}$；(4) $6\mathrm{i}^2$；（5）0；（6）$\frac{1}{2}\mathrm{i}$；(7) $2+\sqrt{3}$.

实数：（1）、（4）、（5）；虚数：（2）、（3）、（6）、（7），其中（6）为纯虚数

3. 复数的分类

$$\text{复数 } z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}\text{实数}（b=0）\\ \\ \text{虚数}（b\neq 0）\quad（\text{特别地，当 } a=0 \text{ 时为纯虚数}）\end{cases}$$

进一步得出复数集，实数集，虚数集的关系.



4．复数相等

在复数集 $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\,|\,a,b\in\mathbf{R}\}$ 中任取两个数 $a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，我们规定：

$a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 相等当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$.

问题 6：由复数相等的含义知，两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部都分别相等，也就是：复数由它的实部和虚部唯一确定。回忆一下，复数的这个特征与你以前遇到过的什么数学对象类似？由此你能进一步刻画复数的特征吗？

复数的这个特征与平面上点的坐标类似，因此复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，可以看成是一个有序实数对 (a,b)，这是我们下节课将要学习的内容.

问题 7：复数是实数的充要条件是什么？ $a+b\mathrm{i}=0$ 的充要条件是什么？

复数是实数的充要条件是 $b=0$； $a+b\mathrm{i}=0$ 的充要条件是 $a=0$ 且 $b=0$.

5.复数的大小关系

一般说来，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小，若两个复数都是实数，可以比较大小，但两个复数中至少有一个为虚数时，不能比较大小．.

概念辨析 2．判断下列说法的对错：

1. 已知 i 为虚数单位，若为 a，b 实数，则 $z=a+b\mathrm{i}$ 为虚数.（　　）

2. 已知i为虚数单位，$-1+2\mathrm{i}$的虚部是$2\mathrm{i}$.　　（　　）

3. 已知i为虚数单位，复数$z=b\mathrm{i}$是纯虚数.　　（　　）

4. 如果两个复数的实部的差和虚部的差都等于 0，那么这两个复数相等.　　（　　）

5. 两个虚数不能比较大小.　　（　　）

（1）×

（2）×

（3）×

（4）√

（5）√

三、概念的应用过程

例 1 当实数m取什么值时，复数$z=m+1+(m-1)\mathrm{i}$是下列数？

（1）　实数；（2）虚数；（3）纯虚数.

分析：因为$m\in\mathbf{R}$，所以$m+1$，$m-1$都是实数. 由复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$是实数、虚数和纯虚数的条件可以确定$m$的取值.

解：（1）当$m-1=0$，即$m=1$时，复数z是实数.

（2）当$m-1\neq0$，即$m\neq1$时，复数z是虚数.

（3）当$m+1=0$，且$m-1\neq0$即$m=-1$时，复数z是纯虚数.

例 2：求满足下列条件的实数x，y的值：$(2x-1)+\mathrm{i}=-1-(3-y)\mathrm{i}$

分析：由两个复数相等得，两个复数的实部和虚部分别对应相等.

$2x-1=-1$，且$1=-(3-y)$解得：$x=0$，$y=4$.

四、小结

知识：1. 数系的扩充、虚数单位的引入

2. 复数的定义

3. 复数的分类

4. 复数相等

方法：从特殊到一般，归纳类比

数学核心素养：数学抽象、逻辑推理

【*】

1. 卡丹公式

问题 1：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 没有实数根，如果要使方程有解需要解决什么问题？

答：负实数可以开平方，事实上，数学家在研究解方程问题时早就遇到了负实数的开平方问题，但他们一直在回避．到 16 世纪，数学家在研究实系数一元三次方程的求根公式时，再也无法回避这个问题了．

问题 2：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有求根公式，那一元三次方程有求根公式吗？

答：16 世纪，意大利数学家卡丹在《大术》中，卡丹给出了实际上应归功于同时代另一位意大利数学家塔塔格里亚（N.Tartaglia,1499~1557）的三次方程 $x^3+px=q$ 的求根公式：

$$x^3=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ ,$$

这个公式就被后人误称为“卡丹公式”.

问题 3：利用卡尔丹公式并求解一元三次方程 $x^3-7x-6=0$，你遇到了什么问题？

$$x^3=\sqrt[3]{\frac{6}{2}+\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{6}{2}-\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^3}}$$

$$=\sqrt[3]{3+\sqrt{9-\frac{343}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{9-\frac{343}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

问题 4：那这个方程就没有实数解吗？

指出方程有三个解 3，-2，-1．要解决这个矛盾，需解决负实数开方问题！

引入虚数以后，利用卡丹求根公式求出的解经过化简就是 3，-2，-1．

2. 复数的大小关系

复数能比较大小吗？若两个复数都是实数，可以比较大小，但两个复数中至少有一个为虚数时，不能比较大小．

例如：0 与 i，假设 0 与 i 能比较大小，根据复数相等的定义知 $0\neq \mathrm{i}$，则必有 $0<\mathrm{i}$ 或 $0>\mathrm{i}$，这两种情况有且只有一种成立．由 $0<\mathrm{i}\Rightarrow 0\times\mathrm{i}<\mathrm{i}^2\Rightarrow 0<-1$，这与 $0>-1$ 矛盾；由 $0>\mathrm{i}\Rightarrow -\mathrm{i}\times 0>\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})\Rightarrow -\mathrm{i}^2<0\Rightarrow 1<0$，这与 $1>0$ 矛盾．从而，两个复数（至少有一个为虚

数）不能比较大小.

编者注：带【*】的内容，初学有难度，为选学培优要求，视频 2 里有讲解.本课时请重点学习常规内容（视频 1）.