

数系的发展---学习指南

一、学习目标：

1. 通过方程求解，理解引入复数的必要性，了解复数系的扩充过程，体会数系扩充过程中理性思维的作用，提升逻辑推理素养；
2. 理解复数的代数表示以及虚数、纯虚数的概念，并能够做出正确判断；
3. 理解两个复数相等的含义，知道此处不仅给出了判断两个复数是否相等的依据，也给出了求某些复数值的依据，即利用复数相等的含义，可以得到关于实数 a, b 的方程（组），通过解方程（组）得到 a, b 的值。

二、学法指导：

我们在初中学习了解一元二次方程，由于负数不能开平方，有的一元二次方程没有解，通过对数系的发展过程的了解，要使方程有解，必须扩充实数集。通过回顾数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部矛盾在数系扩充过程中的作用。通过尝试构造新数，归纳出复数的代数表示方法。感受数学发展的美，体会数系的发展是遇到矛盾，解决矛盾的一个过程，激发勇于探索、创新的精神，提高归纳总结的能力。

三、学习过程：

一、概念形成过程

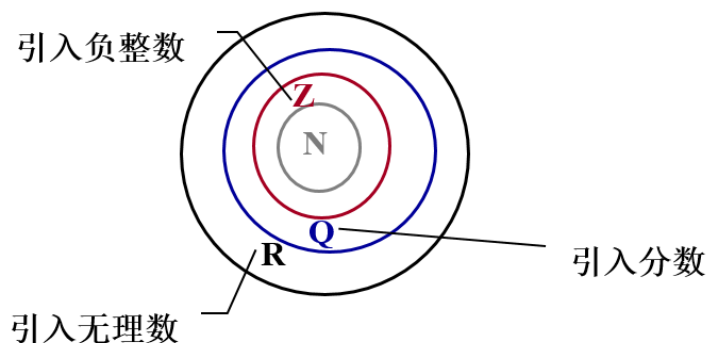
同学们，“数”我们并不陌生，你知道数是如何发展成为今天这个模样的吗？让我们一起揭开它神秘的面纱。

我们知道了数的发展是为了满足社会生产实践的需要。由于自然数不能刻画具有相反意义的量，于是引入负整数，将自然数集扩充到整数集；由于整数集不能解决测量中的等分问题，于是引入分数，将整数集扩充到有理数集；由于有理数集不能解决正方形对角线长问题，于是引入无理数，将有理数集扩充到实数集。

从数学内部发展来看，数的发展也是为了满足运算的需要。

1. 在自然数范围内解方程： $x+4=0$ ，为了解决 $\mathbf{N}$ 中减法不总能实施的问题，引入负整数；
2. 在整数范围内解方程： $3x=2$ ，为了解决 $\mathbf{Z}$ 中除法不总能实施的问题，引入分数；
3. 在有理数范围内解方程： $x^2=2$ ，为了解决 $\mathbf{Q}$ 中正数开方不总能实施的问题，引入无理数。

通过图表分析运算对数的发展的影响：



回顾了从自然数集 $\mathbf{N}$ —— 整数集 $\mathbf{Z}$ —— 有理数集 $\mathbf{Q}$ —— 实数集 $\mathbf{R}$ 的三次扩充过程.

通过三次扩充, 请同学们归纳一下扩充的过程中必须满足的共同规则:

(1) 解决某些运算在原数集中不是总可以实施的矛盾;

(2) 原数集 $\subsetneq$ 新数集;

(3) 在新的数集中, 原有的运算及性质仍然适用.

数系已经进行了三次扩充, 数系能不能再次扩充呢?

引入本节内容.

问题 1: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 中, 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 没有实数根, 如果要使方程有解需要解决什么问题?

答: 负实数可以开平方, 事实上, 数学家在研究解方程问题时早就遇到了负实数的开平方问题, 但他们一直在回避. 到 16 世纪, 数学家在研究实系数一元三次方程的求根公式时, 再也无法回避这个问题了.

问题 2: 从方程的角度看, 负实数能不能开平方, 就是方程 $x^2 = -a (a > 0)$ 是否有解, 也就是 $x^2 + a = 0$ 是否有解的问题, 思考一下, 能不能把这类问题再进一步简化, 最终转化为最简单的方程 $x^2 + 1 = 0$ 是否有解的问题呢?

将方程 $x^2 + a = 0$ 两边同除以 a , 可得 $\frac{x^2}{a} + 1 = 0$, 即 $(\frac{x}{\sqrt{a}})^2 + 1 = 0$. 令 $y = \frac{x}{\sqrt{a}}$, 则 $x^2 + a = 0$

可以转化为 $y^2 + 1 = 0$. 因此, $x^2 + a = 0$ 有没有解, 就可以归结为 $x^2 + 1 = 0$ 有没有解.

我们知道, $x^2 + 1 = 0$ 在实数集中无解, 联系从自然数集到实数集的扩充过程, 是否能引入新数, 适当扩充实数集, 使这个方程在新数集中有解. 引入什么数, 如何扩充实数集? 这就是我们今天所要研究的问题.

问题 3: 可以看出, 数集的每一次扩充, 都是在原来数集的基础上添加“新数”得到的, 引入新数就要引入新运算, 如果没有运算, 数集中的数只是一个个孤立的符号. 加法和乘法运算是上述数系中最基本的运算. 梳理从自然数系逐步扩充到实数系的过程, 数系的每一次扩充, 加法和乘法运算满足的“性质”有一致性吗? 由此你能梳理数系扩充遵循的“规则”吗?

“规则”是：数集扩充后，在新数集中规定的加法运算和乘法运算，与原来数集中规定的加法和乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律。

解决负数开方问题的关键是解决 -1 开方的问题。引入一个什么样的数呢？使得它是 $x^2 + 1 = 0$ 的解，即它的平方为 -1 。

二、概念讲授过程

1. 虚数单位的引入

引入一个新数 i ，叫作虚数单位，并规定：

$$(1) i^2 = -1;$$

(2) 实数可以与 i 进行四则运算，进行四则运算时，原有的加法、乘法运算律仍然成立。

i 是数学家欧拉最早引入的，它取自 imaginary (想象的，假想的) 一词的词头。 $i^2 = i \cdot i$ 。

问题 4: 把新引进的数添加到实数集中后，我们希望按照前面总结的数系扩充的“规则”，对实数系进行进一步扩充。那么，实数系经过扩充后，得到的新数系由哪些数组成？

类比有理数系扩充到实数系的过程与方法，如 $2\sqrt{2}$ ， $2+\sqrt{3}$ 等，以及实数系中新数的形式，将实数与 i 进行加法和乘法运算，例如：把实数 1 与新引入的数 i 相加可以得到 $1+i$ ；把实数 3 与新引入的数 i 相乘可以得到 $3i$ ；把实数 1 与实数 3 和 i 相乘的结果相加可以得到 $1+3i$ 。

问题 5: 你能写出一个形式，把刚才的举例中的数都包含在内，并说明理由吗？

把实数 a 与新引入的数 i 相加可以得到 $a+i$ ；把实数 b 与新引入的数 i 相乘可以得到 bi ；把实数 a 与实数 b 和 i 相乘的结果相加可以得到 $a+bi$ ；所有新数集中的数都可以写成 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的形式，例如 $a = a+0 \cdot i$ ， $bi = 0+bi$ ， $i = 0+1 \cdot i$ 。

2. 复数的定义

形如 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的数称为复数，通常用字母 z 表示，其中 a 叫做复数的实部， b 叫做复数的虚部。

全体复数组成的集合叫复数集，通常用 $\mathbf{C}$ 表示，即 $\mathbf{C} = \{a+bi | a, b \in \mathbf{R}\}$ 。

注意：复数的实部与虚部都是实数。

概念辨析 1.

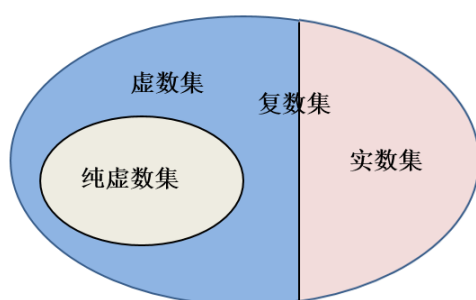
写出下列复数的实部与虚部，你能给下列复数分分类吗？

(1) 4; (2) $2-3i$; (3) $5i+\sqrt{2}$; (4) $6i^2$; (5) 0; (6) $\frac{1}{2}i$; (7) $2+\sqrt{3}$.

3. 复数的分类

$$\text{复数 } z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}) \begin{cases} \text{实数 } (b = 0) \\ \text{虚数 } (b \neq 0) \quad (\text{特别地, 当 } a = 0 \text{ 时为纯虚数}) \end{cases}$$

进一步得出复数集, 实数集, 虚数集的关系.



4. 复数相等

在复数集 $\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbf{R}\}$ 中任取两个数 $a + bi, c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$, 我们规定:

$a + bi$ 与 $c + di$ 相等当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$.

问题 6: 由复数相等的含义知, 两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等, 也就是: 复数由它的实部和虚部唯一确定. 回忆一下, 复数的这个特征与你以前遇到过的什么数学对象类似? 由此你能进一步刻画复数的特征吗?

复数的这个特征与平面上点的坐标类似, 因此复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 可以看成是一个有序实数对 (a, b) , 这是我们下节课将要学习的内容.

问题 7: 复数是实数的充要条件是什么? $a + bi = 0$ 的充要条件是什么?

复数是实数的充要条件是 $b = 0$; $a + bi = 0$ 的充要条件是 $a = 0$ 且 $b = 0$.

5. 复数的大小关系

一般说来, 两个复数只能说相等或不相等, 而不能比较大小, 若两个复数都是实数, 可以比较大小, 但两个复数中至少有一个为虚数时, 不能比较大小.

概念辨析 2. 判断下列说法的对错:

1. 已知 i 为虚数单位, 若 a, b 实数, 则 $z = a + bi$ 为虚数. ()

2. 已知 i 为虚数单位, $-1+2i$ 的虚部是 $2i$. ()

3. 已知 i 为虚数单位, 复数 $z=bi$ 是纯虚数. ()

4. 如果两个复数的实部的差和虚部的差都等于 0, 那么这两个复数相等. ()

5. 两个虚数不能比较大小. ()

三、概念的应用过程

例 1 当实数 m 取什么值时, 复数 $z=m+1+(m-1)i$ 是下列数?

(1) 实数; (2) 虚数; (3) 纯虚数.

例 2: 求满足下列条件的实数 x , y 的值: $(2x-1)+i=-1-(3-y)i$

四、小结

知识: 1. 数系的扩充、虚数单位的引入

2. 复数的定义

3. 复数的分类

4. 复数相等

方法: 从特殊到一般, 归纳类比

数学核心素养: 数学抽象、逻辑推理

【*】

1. 卡丹公式

问题 1: 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中, 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 没有实数根, 如果要使方程有解需要解决什么问题?

答: 负实数可以开平方, 事实上, 数学家在研究解方程问题时早就遇到了负实数的开平方问

题，但他们一直在回避．到 16 世纪，数学家在研究实系数一元三次方程的求根公式时，再也无法回避这个问题了．

问题 2：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有求根公式，那一元三次方程有求根公式吗？

答：16 世纪，意大利数学家卡丹在《大术》中，卡丹给出了实际上应归功于同时代另一位意大利数学家塔塔格里亚（N.Tartaglia, 1499~1557）的三次方程 $x^3 + px = q$ 的求根公式：

$$x^3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

这个公式就被后人误称为“卡丹公式”．

问题 3：利用卡尔丹公式并求解一元三次方程 $x^3 - 7x - 6 = 0$ ，你遇到了什么问题？

$$\begin{aligned} x^3 &= \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} \end{aligned}$$

问题 4：那这个方程就没有实数解吗？

指出方程有三个解 3，-2，-1．要解决这个矛盾，需解决负实数开方问题！

引入虚数以后，利用卡丹求根公式求出的解经过化简就是 3，-2，-1．

2. 复数的大小关系

复数能比较大小吗？若两个复数都是实数，可以比较大小，但两个复数中至少有一个为虚数时，不能比较大小．

例如：0 与 i，假设 0 与 i 能比较大小，根据复数相等的定义知 $0 \neq i$ ，则必有 $0 < i$ 或 $0 > i$ ，这两种情况有且只有一种成立．由 $0 < i \Rightarrow 0 \times i < i^2 \Rightarrow 0 < -1$ ，这与 $0 > -1$ 矛盾；由 $0 > i \Rightarrow -i \times 0 > i \times (-i) \Rightarrow -i^2 < 0 \Rightarrow 1 < 0$ ，这与 $1 > 0$ 矛盾．从而，两个复数（至少有一个为虚数）不能比较大小．

编者注：带【*】的内容，初学有难度，为选学培优要求，视频 2 里有讲解.本课时请重点学习常规内容（视频 1）．