

回顾三角形中的边与角——学习指南

一、学习目标：

1. 熟悉三角形中边与角的正弦关系、公式的结构特点，知道这两种关系在能解决解三角形中哪些问题.
2. 能根据问题中所给的边角关系，做出合理选择，实现边角的转化，从而解决问题. 归纳总结解题方法.
3. 体会数学中的转化思想，提高数学运算素养，逻辑推理素养.

二、学法指导：

我们在 24、25、27 课时探究了三角形边与角的正弦关系，得到了新的三角形的面积公式。对解决三角形的边角关系有了方法和思路。这节课我们就已经学习探究过的结论、公式做一个梳理。进一步熟悉得到的结论、公式，归纳总结解题方法。在学习过程中关注的转化思想，数形结合思想和方程思想. 进一步提升数学运算素养，逻辑推理素养.

三、学习过程：

（一）主要结论的回顾

1、正弦关系： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 为三角形外接圆半径）

（1）公式的变形：① $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$

$$\text{② } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\text{③ } a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$\text{④ } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R$$

（2）面积公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$

2、余弦关系：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \qquad \text{公式变形} \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

若 $C=90^\circ$, 则 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以勾股定理是余弦关系的特例。因此

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \angle C = 90^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 为直角三角形}$$

$$c^2 > a^2 + b^2 \Leftrightarrow \angle C > 90^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 为钝角三角形}$$

$$c^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow \angle C < 90^\circ, \quad c^2 < a^2 + b^2 \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形必要不充分条件。}$$

3、正余弦关系在解三角形中能解决的问题

(1) 已知三边, 或两边及夹角用余弦关系;

(2) 已知两角及任意一边用正弦关系

(3) 已知两边及一边对角, 可用正弦关系、也可以用余弦关系。

(此时会出现无解、一解、两解的情况)

多解时注意检验。检验方法: ①三角形内角和为 180°

②大边对大角、两边之和大于第三边。

③画三角形

④将解代回已知条件, 看是否符合。

4、在 $\triangle ABC$ 中注意: $A + B + C = \pi$

$$(1) C = \pi - (A + B) \Rightarrow \sin C = \sin(A + B); \cos C = -\cos(A + B)$$

$$(2) \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{(A + B)}{2} \Rightarrow \sin \frac{C}{2} = \cos \left(\frac{A + B}{2} \right); \cos \frac{C}{2} = \sin \left(\frac{A + B}{2} \right)$$

$$(3) a > b \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow \sin A > \sin B$$

(二)典型问题的讲解

问题 1: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 3, b = \sqrt{3}, A = \frac{\pi}{3}$, 则 $c =$ _____

解析: 属于“边边角”问题, 即可以用正弦, 也可以用余弦关系。

法一: 由正弦关系得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{1}{2} \because a > b, A = \frac{\pi}{3} \therefore B$ 为锐角, $B = \frac{\pi}{6} \therefore C = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore c = \frac{a}{\sin A} \sin C = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin 90^\circ = 2\sqrt{3} \left(\because c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3} \right)$$

法二 $\because a = 3, b = \sqrt{3}, A = \frac{\pi}{3} \therefore$ 由余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\text{得 } c^2 - \sqrt{3}c - 6 = 0, \therefore c = 2\sqrt{3} \text{ 或 } -\sqrt{3} (\text{舍去}) \therefore c = 2\sqrt{3}$$

变式: 若 $a = 3, b = \sqrt{7}, B = \frac{\pi}{3}$, 则边 $c =$ _____.

变式的法一: 由正弦关系, 由于 A 不是特殊角, 较为麻烦。同学们可以自己试试。

变式的法二 $\because a = 3, b = \sqrt{7}, B = \frac{\pi}{3} \therefore$ 由余弦关系: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$$\text{得 } c^2 - 3c + 2 = 0, \therefore c = 2 \text{ 或 } c = 1$$

$$\because a \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2} < b < a$$

$$\therefore c = 2 \text{ 或 } c = 1 \text{ 均适合题意}$$

小结 “边边角”问题求第三边 1、可以使用正弦、也可用余弦;

2、当已知角对大边, 用余弦关系方便; 当已知角对小边, 用余弦可能无解一解

或两解。若还有其他条件, 一定注意检验。

问题 2: 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sqrt{3}a \sin C = c \sin 2A$

(I) 求角 A 的大小; (II) 若 $a = \sqrt{7}, b = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。

解: (I) $\because \sqrt{3}a \sin C = c \sin 2A \therefore$ 由正弦关系得 $\sqrt{3} \sin A \cdot \sin C = \sin C \cdot 2 \sin A \cos A$

$$\because A, C \in (0, \pi) \therefore \sin A \neq 0, \sin C \neq 0 \therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad A = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{法二} \because \sqrt{3}a \sin C = c \sin 2A \therefore \sqrt{3}a \sin C = 2c \sin A \cos A$$

$$\text{由正弦关系得: } \sqrt{3}ac = 2ca \cos A \therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \because A \in (0, \pi) \therefore A = \frac{\pi}{6}$$

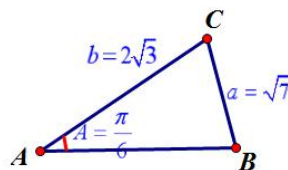
(II) 由余弦关系知: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\text{即 } (\sqrt{7})^2 = (2\sqrt{3})^2 + c^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore c^2 - 6c + 5 = 0$$

$\therefore$ 解得 $c = 1$ 或 $c = 5$, 均符合题意。

$$\therefore \text{当 } c = 1 \text{ 时, } \triangle ABC \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{当 } c = 5 \text{ 时, } \triangle ABC \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{5\sqrt{3}}{2}。$$



问题 3: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $2\cos^2 \frac{A}{2} \geq \frac{b+c}{c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 直角三角形或钝角三角形

$$\text{解析: } \because 2\cos^2 \frac{A}{2} \geq \frac{b+c}{c} \therefore \cos A \geq \frac{b}{c}$$

$$\text{法一: 由正弦关系得 } \cos A \geq \frac{\sin B}{\sin C} \because C \in (0, \pi) \therefore \sin C > 0 \therefore \cos A \sin C \geq \sin B$$

$$\because A + B + C = \pi \therefore \cos A \sin C \geq \sin(A + C) \therefore \cos C \sin A \leq 0$$

$$\because A \in (0, \pi) \therefore \sin A > 0 \therefore \cos C \leq 0$$

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos C = 0$, 则 $C = 90^\circ$, 三角形为直角三角形。

若 $\cos C < 0$, 则 $C > 90^\circ$, 三角形为钝角三角形。

$$\text{法二: 由余弦关系得 } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \geq \frac{b}{c} \because b, c \text{ 均大于零} \therefore b^2 + c^2 - a^2 \geq 2b^2 \text{ 即 } c^2 \geq a^2 + b^2$$

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $c^2 = a^2 + b^2$, 则 $C = 90^\circ$, 三角形为直角三角形。

若 $c^2 > a^2 + b^2$, 则 $C > 90^\circ$, 三角形为钝角三角形。

小结① 当等式 (或不等式) 两边是边或角正弦的齐次式, 可用正弦关系 “边化角, 角化边”

② 当分子、分母是边或角正弦的齐次式, 也可用正弦关系 “边化角, 角化边”

问题 4: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $AB = 8$, 点 D 在 BC 边上, 且 $CD = 2$, $\cos \angle ADC = \frac{1}{7}$.

(I) 求 $\sin \angle BAD$; (II) 求 BD , AC 的长.

解: (I) $\because \angle ADB = \pi - \angle ADC \therefore \cos \angle ADB = \cos(\pi - \angle ADC) = -\cos \angle ADC = -\frac{1}{7}$

$$\therefore \text{在} \triangle ABD \text{中}, \angle ADB \text{为钝角} \therefore \sin \angle ADB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADB} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore \angle BAD = \pi - \frac{\pi}{3} - \angle ADB = \frac{2\pi}{3} - \angle ADB$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \angle BAD &= \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \angle ADB\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \angle ADB - \left(-\frac{1}{2}\right) \sin \angle ADB \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

法二: 因为 $\angle ADC = \angle B + \angle BAD$, 所以 $\angle BAD = \angle ADC - \angle B$

$$\because \cos \angle ADC = \frac{1}{7}, \angle ADC \in (0, \pi) \therefore \sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin \angle BAD &= \sin\left(\angle ADC - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \angle ADC \cos \frac{\pi}{3} - \cos \angle ADC \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

$$(II) \because \sin \angle ADC = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \angle ADC + \angle ADB = \pi, \therefore \sin \angle ADB = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{在} \triangle ABD \text{中}, \text{由正弦关系} \quad \frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \quad BD = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \sin \angle BAD = \frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = 3$$

$$\text{在} \triangle ABC \text{中}, \angle B = \frac{\pi}{3}, AB = 8, BC = 5$$

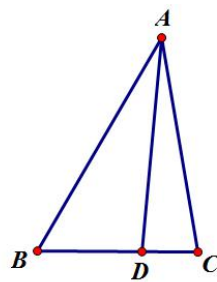
$$\text{由余弦关系 } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \therefore AC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 49$$

$$\because AC > 0 \therefore AC = 7$$

$$\text{(另法: 在} \triangle ABD \text{中, 由正弦关系 } \frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD} \therefore AD = \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$$

$$\text{在} \triangle ADC \text{中, 由余弦关系 } AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle ADC \therefore AC^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \times 7 \times 2 \times \frac{1}{7} = 49$$

$$\because AC > 0 \therefore AC = 7)$$



小结 ①正余弦关系是一个三角形中的边角关系, 当多个三角形“套”在一起是, 要根据条件分析在哪个三角形中才能使用这些关系。

② 选择三角形的前提是至少有一边已知, 条件多优先。

③注意观察三角形之间的边角联系。(如三角形外角等于不相邻的两内角和, 公共边、公共角等)

问题 5: 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ$, $AC = \sqrt{3}$, 求 $AB + BC$ 的最大值。

解: 不妨设 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , 则 $b = \sqrt{3}$, 求 $a + c$ 的最大值。

法一: 由余弦关系知: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ 即 $(\sqrt{3})^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ$

$$\therefore 3 = (a+c)^2 - 3ac \quad \therefore (a+c)^2 - 3 = 3ac \leq 3 \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 \therefore (a+c)^2 \leq 12$$

当且仅当 $a = c$ 时取等号, 即三角形为等边三角形时, 所以 $a + c$ 的最大值 $2\sqrt{3}$

法二: 由正弦关系, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为三角形外接圆半径)

$$\therefore 2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

$$\therefore a + c = 2R \sin A + 2R \sin C = 2(\sin A + \sin C) = 2\left[\sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)\right] = 2\left(\frac{3}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A + \frac{1}{2}\cos A\right) = 2\sqrt{3}\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\because A \in (0, \pi) \quad \therefore A + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right) \quad \therefore A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{3} \text{ 时 } \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 有最大值 } 1$$

所以三角形为等边三角形时, $a + c$ 有最大值 $2\sqrt{3}$ 。

变式: 满足条件 $AB = 2$, $AC = \sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值是_____。

解: 不妨设 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , 则 $c = 2, b = \sqrt{2}a$,

$$\text{由余弦关系知: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3a^2 - 4}{2\sqrt{2}a^2}$$

$$\because C \in (0, \pi) \quad \therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{9a^4 - 24a^2 + 16}{8a^4}} = \frac{\sqrt{-a^4 + 24a^2 - 16}}{2\sqrt{2}a^2}$$

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{a \cdot \sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{-a^4 + 24a^2 - 16}}{2\sqrt{2}a^2} = \frac{\sqrt{-(a^2 - 12)^2 + 128}}{4}$$

所以当 $a^2 = 12$, 即 $a = 2\sqrt{3}$ 时, 三角形 ABC 的面积最大, 最大值为 $2\sqrt{2}$

小结 ① 求一个变化量的最值, 一般是建立这个量的目标函数或者建立这个量满足的不等关系。

问题 4 的法二及变式就是建立求最值量的目标函数; 而问题 4 的法一, 则是通过建立不等关系, 解不等式求最值。

②三角形中的最值问题, 一般会有利用边做或利用角做两种选择。

（三）解题方法的总结

三角形中的正余弦关系，完美地揭示了三角形边与角之间的秘密，让我们在边角之间任意转换。

“边化角，角化边”是我们解决三角形问题的主要策略。

（1）已知三边，或两边及夹角用余弦关系；

（2）已知两角及任意一边用正弦关系

（3）已知两边及一边对角，可用正弦关系、也可以用余弦关系。

（此时会出现无解、一解、两解的情况）

“边边角问题”求边，利用余弦关系，建立所求边的二次方程较为简便。