

回顾三角形中的边与角——学习指南

一、学习目标：

1. 熟悉三角形中边与角的正弦关系、公式的结构特点，知道这两种关系在能解决解三角形中哪些问题.
2. 能根据问题中所给的边角关系，做出合理选择，实现边角的转化，从而解决问题. 归纳总结解题方法.
3. 体会数学中的转化思想，提高数学运算素养，逻辑推理素养.

二、学法指导：

我们在 24、25、27 课时探究了三角形边与角的正弦关系，得到了新的三角形的面积公式。对解决三角形的边角关系有了方法和思路。这节课我们就已经学习探究过的结论、公式做一个梳理。进一步熟悉得到的结论、公式，归纳总结解题方法。在学习过程中关注的转化思想，数形结合思想和方程思想. 进一步提升数学运算素养，逻辑推理素养.

三、学习过程：

（一）主要结论的回顾

1、正弦关系： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 为_____）

（1）公式的变形： ① $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$

② $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$

③ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

④ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R$

（2）面积公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C =$ _____

2、余弦关系：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
 公式变形

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
 _____。

若 $C=90^\circ$, 则 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以勾股定理是余弦关系的特例。因此

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \angle C = 90^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 为 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 三角形}$$

$$c^2 > a^2 + b^2 \Leftrightarrow \angle C > 90^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 为 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 三角形}$$

$$c^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow \angle C < 90^\circ, \quad c^2 < a^2 + b^2 \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 条件。}$$

3、正余弦关系在解三角形中能解决的问题

(1) 已知三边, 或两边及夹角用_____关系;

(2) 已知两角及任意一边用_____关系

(3) 已知两边及一边对角, 可用_____关系。

(此时会出现无解、一解、两解的情况)

多解时注意检验。检验方法: ①三角形内角和为 180°

②大边对大角、两边之和大于第三边。

③画三角形

④将解代回已知条件, 看是否符合。

4、在 $\triangle ABC$ 中注意: $A+B+C=\pi$

(1) $C=\pi-(A+B) \Rightarrow \sin C =$; $\cos C =$

(2) $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{(A+B)}{2} \Rightarrow \sin \frac{C}{2} =$; $\cos \frac{C}{2} =$

(3) $a > b \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow \sin A > \sin B$

(二)典型问题的讲解

问题 1: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=3, b=\sqrt{3}, A=\frac{\pi}{3}$, 则 $c=$ _____

变式: 若 $a=3, b=\sqrt{7}, B=\frac{\pi}{3}$, 则边 $c=$ _____.

小结 “边边角”问题求第三边 1、可以使用正弦、也可用余弦;

2、当已知角对大边, 用余弦关系方便; 当已知角对小边, 用余弦可能无解一解或两解。若还有其他条件, 一定注意检验。

问题 2: 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sqrt{3}a \sin C = c \sin 2A$

(I) 求角 A 的大小;

(II) 若 $a=\sqrt{7}, b=2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。

问题 3: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $2\cos^2 \frac{A}{2} \geq \frac{b+c}{c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____

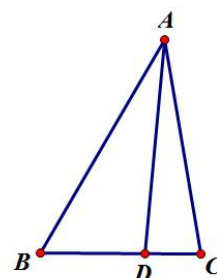
小结 ①当等式（或不等式）两边是边或角正弦的齐次式，可用正弦关系“边化角，角化边”

②当分子、分母是边或角正弦的齐次式，也可用正弦关系“边化角，角化边”

拓展提升

问题 4: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $AB = 8$, 点 D 在 BC 边上, 且 $CD = 2$, $\cos \angle ADC = \frac{1}{7}$.

(I) 求 $\sin \angle BAD$; (II) 求 BD , AC 的长.



小结 ①正余弦关系是一个三角形中的边角关系，当多个三角形“套”在一起是，要根据条件分析在哪个三角形中才能使用这些关系。

② 选择三角形的前提是至少有一边已知，条件多优先。

③注意观察三角形之间的边角联系。（如三角形外角等于不相邻的两内角和，公共边、公共角等）

问题 5: 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ, AC = \sqrt{3}$, 求 $AB + BC$ 的最大值。

变式: 满足条件 $AB = 2, AC = \sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值是_____.

小结 ① 求一个变化量的最值, 一般是建立这个量的目标函数或者建立这个量满足的不等关系。

问题 4 的法二及变式就是建立求最值量的目标函数; 而问题 4 的法一, 则是通过建立不等关系, 解不等式求最值。

② 三角形中的最值问题, 一般会有利用边做或利用角做两种选择。

(三) 解题方法的总结

三角形中的正余弦关系, 完美地揭示了三角形边与角之间的秘密, 让我们在边角之间任意转换。

“边化角, 角化边” 是我们解决三角形问题的主要策略。

(1) 已知三边, 或两边及夹角用余弦关系;

(2) 已知两角及任意一边用正弦关系

(3) 已知两边及一边对角, 可用正弦关系、也可以用余弦关系。

(此时会出现无解、一解、两解的情况)

“边边角问题” 求边, 利用余弦关系, 建立所求边的二次方程较为简便。