

生活中的测量问题学习指南答案

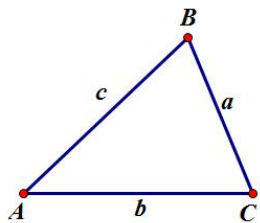
【学习目标】

- 1、能够应用三角形的边角关系的结论，解决一些测量和几何计算有关的实际问题.
- 2、通过解决实际问题，体会如何将实际问题转化为数学问题，提高数学抽象思维能力，发展数学建模的素养.
- 3、通过解决实际问题，会用数学模型的解来解释实际问题的结果，提高分析问题与解决问题的能力.

【学法指导】首先要正确理解题目的含义，然后将实际问题转化为相应的数学问题，建立对应的数学模型，通过求解数学模型，利用数学模型的解来得到实际问题的结果.

【自主探究任务】

任务一：三角形中有哪些边与角的关系？



角的关系： $A + B + C = 180^\circ$

边的关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边

边角关系：大边对大角，大角对大边

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

任务二：解三角形

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $A = 15^\circ$ ， $B = 45^\circ$ ， $c = 3 + \sqrt{3}$ ，解这个三角形

解：由三角形内角和定理，得 $C = 180^\circ - (A + B) = 120^\circ$ ，

由边角关系： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，得

$$\begin{aligned} a &= \frac{C \sin A}{\sin C} = \frac{(3 + \sqrt{3}) \sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{(3 + \sqrt{3}) \sin(45^\circ - 30^\circ)}{\sin 120^\circ} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})(\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ)}{\sin 120^\circ} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{(3+\sqrt{3}) \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{(3+\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

思考 1: 若已知三角形的两角和其中一角所对的边, 如何解三角形?

总结: 利用三角形内角和定理求出第三个角, 再利用关系式: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 求出三角形的另外两条边.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 30^\circ$, $b = 1, c = 2$, 解这个三角形

解 1: 由边角关系: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = 1$

因为 $0 < C < 180^\circ$, 所以 $C = 90^\circ$, 所以 $A = 180^\circ - (C + B) = 60^\circ$, $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

解 2: 由边角关系: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 有 $a^2 - 2\sqrt{3}a + 3 = 0$, $a = \sqrt{3}$

再由边角关系 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0$,

因为 $0 < C < 180^\circ$, 所以 $C = 90^\circ$, $A = 180^\circ - (C + B) = 60^\circ$

思考 2: 若已知三角形的两边和其中一边所对的角, 如何解三角形?

总结: 利用关系式: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 求出其中一边的对角, 再转化为思考 1

的问题解决. 也可由关系式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 来求解.

探究: 三角形三边与三个内角六个量中, 知三求三还有哪些情况?

总结: 若已知三角形的三边, 解三角形, 可以利用边角关系

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

求出三角形的内角.

总结: 若已知三角形的两边和其夹角, 解三角形, 可以利用关系式: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

求出其中一边的对角, 转化为思考 1 的问题解决;

也可利用边角关系

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

求出第三边, 化为已知三角形的三边, 解三角形问题解决.

其中“已知三角形的两边和其中一边所对的角”的类型，需要注意解的个数问题.

任务三：回顾相关术语

解三角形的问题主要表现在测量距离问题、高度问题，其相关术语有：

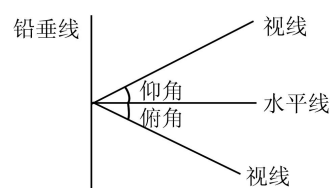
仰角：视线与水平线所成的角中，当视线在水平线上方时叫做仰角

俯角：视线与水平线所成的角中，当视线在水平线下方时叫做俯角

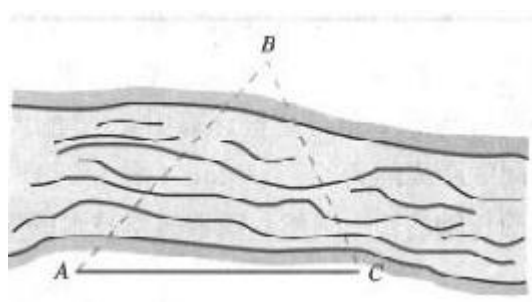
坡角：坡面与水平面的夹角

坡度（比）：坡面的垂直高度和水平距离的比

方位角：从正北方向顺时针旋转到目标方向的水平角



例 1、设 A、B 两点在河的两岸，要测量两点之间的距离，测量者在 A 的同侧，在所在的河岸边选定一点 C，利用卷尺测出 AC 的距离是 30 米，利用经纬仪测出 $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\angle ACB = 75^\circ$ ，求 A、B 两点间的距离.



解 1：在 $\triangle ABC$ 中， $AC=30$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\angle ACB = 75^\circ$ ，

所以 $\angle CBA = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 60^\circ$ ，

由边角关系： $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle CBA}$

所以 $AB = \frac{AC \sin \angle ACB}{\sin \angle CBA} = \frac{30 \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 20\sqrt{3} \sin 75^\circ$

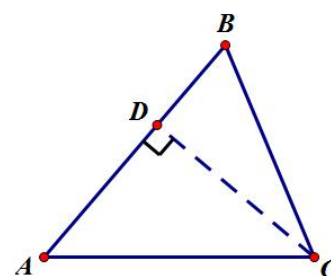
因为 $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

所以 $AB = 15\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$

答：A、B 两点间的距离为 $15\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$

思考 1：你还有不同的方法吗？

答：有，还可以将斜三角形转化为特殊的直角三角形，通过解



直角三角形来求解.

解 2: 如图, 过 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D

在 $RT\triangle ADC$ 中, $AD=CD=CA \sin \angle CAD = 30 \times \sin 45^\circ = 15\sqrt{2}$

在 $RT\triangle CDB$ 中, $\frac{DB}{CD} = \tan \angle BCD = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

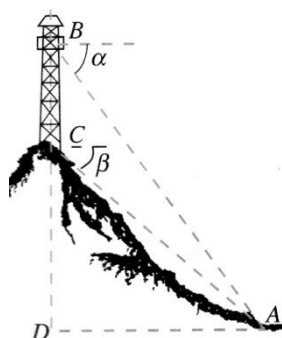
即 $DB = 5\sqrt{6}$, 所以 $AB = AD + DB = 15\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$

思考 2: 这两种方法的区别是什么?

答: 解法 1 是直接利用边角关系和方程思想求解; 解法 2 是将斜三角形转化为特殊的直角三角形, 通过解直角三角形来求解, 两种解法都是常见的思考这类问题的方法.

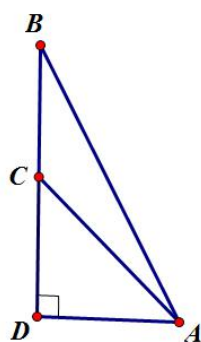
例 2、如图, 在山顶铁塔上 B 处测得地面上一点 A 的俯角 $\alpha = 60^\circ$, 在塔底 C 处测得

A 处的俯角 $\beta = 45^\circ$, 已知铁塔 BC 部分的高为 20m, 求山高 CD.



思考 1: 相应的数学模型是怎样的?

答: 如图, 相当于已知在 $RT\triangle ABD$ 中, $BC = 20$, $\angle CBA = 30^\circ$, $\angle BAC = 15^\circ$, 求 CD



思考 2: 你准备如何求解?

解 1: 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 20$, $\angle CBA = 30^\circ$, $\angle BAC = 15^\circ$

由边角关系: $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{CA}{\sin \angle CBA}$

$$\text{所以 } CA = \frac{BC \sin \angle CBA}{\sin \angle BAC} = \frac{20 \sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{10}{\sin 15^\circ}$$

$$\text{在 } RT\triangle ADC \text{ 中, } CD = CA \sin \angle CAD = \frac{10}{\sin 15^\circ} \times \sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$$

$$\text{因为 } \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{所以 } CD = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 10\sqrt{3} + 10$$

答：山高 CD 为 $10\sqrt{3} + 10$ m

思考 3：你还有不同的方法吗？

解 2：设 $CD = x$ ，在 $RT\triangle ADC$ 中， $AD = CD = x$

$$\text{在 } RT\triangle ADB \text{ 中, } \frac{AD}{BD} = \tan \angle ABD = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{即 } \frac{x}{20+x} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得 } x = 10\sqrt{3} + 10$$

答：山高 CD 为 $10\sqrt{3} + 10$ m

思考 4：这两种方法的区别是什么？

答：解法 1 是直接利用边角关系和方程思想求解；解法 2 是通过解特殊直角三角形，利用锐角三角函数和方程思想求解，两种解法都是常见的思考这类问题的方法。

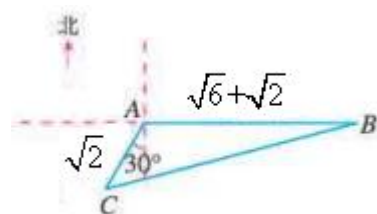
(*)例 3、位于某海域 A 处的甲船获悉，在其正东方向相距 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 海里的 B 处有一艘渔船遇

险后抛锚等待救援，甲船立即前往救援，同时把消息告知位于甲船南偏西 30° ，且与甲船相

距 $\sqrt{2}$ 海里的 C 处的乙船，那么乙船前往营救遇险渔船时的目标方向线（由观测点看目标的

视线）的方向是北偏东多少度？需要航行的距离是多少海里？

分析：由于题目没有画出图形，因此首先要准确理解题意，画出示意图，另外应该正确理解“正东方向”“南偏西”“目标方向线”等信息。



解：如图，由边角关系， $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

$$\text{有 } BC^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos 120^\circ = 12 + 6\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})^2$$

$$\text{于是 } BC = 3 + \sqrt{3}$$

$$\text{由 } \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}, \text{ 得 } \sin C = \frac{AB \sin A}{BC} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于 $0 < C < 90^\circ$ 所以 $C = 45^\circ$

答：乙船前往营救遇险渔船时的目标方向线（由观测点看目标的视线）的方向是北偏东 $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ ，需要航行 $3 + \sqrt{3}$ 海里。

(选用*)例 3、如图，AB 是底部 B 不可到达的一座建筑物，A 为建筑的最高点，现有卷尺和经纬仪，根据现有的工具设计一种测量建筑高度 AB 的方法，并求出建筑物的高度。



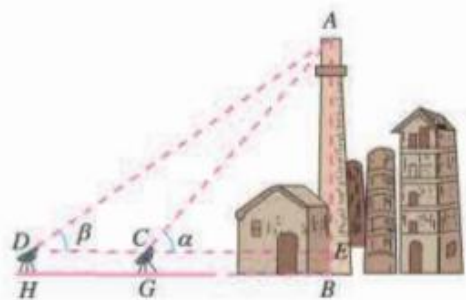
分析：这是一个底部不可到达的建筑物高度测量问题，依然可以看作平面上解三角形的问题，需要注意测量方案的可操作性，根据现有的工具，我们能够测量距离和角度，下面我们思考如下：

思考 1：若只选取一个点 C 能够解决问题吗？为什么？

答：只选取一个点 C 不能够解决问题，因为构造的三角形缺少边长，所以只选取一个点 C 不能求出 AB 的距离。

思考 2：若选取两个点 C、D，对于 C、D 的位置有什么要求吗？需要测量哪些数据？

答：如图，需要测量 CD 长度， $\angle ADC$ 、 $\angle ACE$



解：如图，选择一条水平基线 HG，使得 H、G、B 在一条直线上，在点 G、H 两点分别用经纬仪测 A 的仰角为 α 、 β ， $CD = a$ ，设经纬仪的高度为 h，

因为在 $\triangle ACD$ 中，由边角关系：
$$\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin \angle DAC}$$

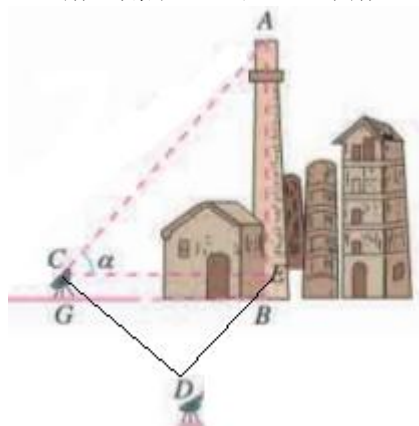
$$\text{所以 } AC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

所以这座建筑的高度为， $AB = AE + h = AC \sin \alpha + h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h$

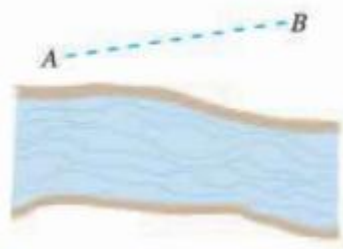
思考 3：在实际的操作中，使 H、G、B 三点共线不是一件容易的事，你有什么替代方案？

答：可以使得点 D、C、E 不在一条直线上，测量 CD 长度， $\angle ECD$ 、 $\angle CDE$

通过解三角形 CDE 和 ACE 求解



(*)例 4、(A、B 两点都在河的对岸（不可到达），现有卷尺和经纬仪，根据现有的工具设计一种侧量 A、B 两点间距离的方法，并求出 A、B 两点间距离



分析：这是一个关于河的对岸不可到达的两点的距离的测量问题，这个问题要求自己设计方案，并且给出计算这两点距离的方法，因为 A、B 两点不能够到达，所以测量只能在 A、B 两点的对岸进行，并且根据现有的工具，我们能够测量距离和角度，下面我们思考如下：

思考 1：若在 A、B 两点的对岸只选取一个点 C 能够解决问题吗？为什么？

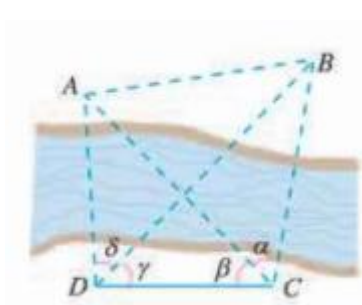
答：只选取一个点 C 不能够解决问题，因为构造的三角形 ABC 缺少边长，所以只选取一个点 C 不能求出 AB 的距离。

思考 2：若在 A、B 两点的对岸选取两个点 C、D，那么需要测量哪些数据？为什么？

答：需要测量 CD 的距离， $\angle BCA$ 、 $\angle ACD$ 、 $\angle CDB$ 、 $\angle BDA$ 的大小，因为 $\triangle ADC$ 、 $\triangle BCD$

可解，所以能够求出线段 AC、BC 的长，从而转化为“已知三角形的两边和其夹角，求第

三边的问题”，即解三角形 ABC.



解：在 A、B 两点的对岸只选取两个点 C、D，测得 $CD = a$ ，

并且在 C、D 两地测得

$\angle BCA = \alpha$ ， $\angle ACD = \beta$ ， $\angle CDB = \gamma$ ， $\angle BDA = \delta$ ，

在 $\triangle ADC$ 中，由边角关系： $\frac{CD}{\sin \angle DAC} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$

因为 $\angle DAC = 180^\circ - \beta - \gamma - \delta$ ，

$$\text{所以 } AC = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin[180^\circ - (\beta + \gamma + \delta)]} = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$$

$$\text{同理：在 } \triangle BDC \text{ 中， } BC = \frac{a \sin \gamma}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)]} = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$$

所以在 $\triangle ABC$ 中，由边角关系： $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \alpha$ ，有

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \alpha}$$

$$AB = \sqrt{\frac{a^2 \sin^2(\gamma + \delta)}{\sin^2(\beta + \gamma + \delta)} + \frac{a^2 \sin^2 \gamma}{\sin^2(\alpha + \beta + \gamma)} - \frac{2a^2 \sin(\gamma + \delta) \sin \gamma \cos \alpha}{\sin(\beta + \gamma + \delta) \sin(\alpha + \beta + \gamma)}}$$

答：AB 距离为 $\sqrt{\frac{a^2 \sin^2(\gamma + \delta)}{\sin^2(\beta + \gamma + \delta)} + \frac{a^2 \sin^2 \gamma}{\sin^2(\alpha + \beta + \gamma)} - \frac{2a^2 \sin(\gamma + \delta) \sin \gamma \cos \alpha}{\sin(\beta + \gamma + \delta) \sin(\alpha + \beta + \gamma)}}$

思考 3：在上述测量方案下，还有其他计算 AB 距离的方法吗？

答：还可以通过解三角形 ADB 得到， $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2 - 2AD \times BD \cos \delta}$ 。

自主小结：谈谈你本节课得收获与体会？

1. 实践中，我们常常会遇到测量距离、长度、角度等实际问题，这样的实际问题常常可以看作平面上解三角形的问题，需要根据现有的工具，设计合适的测量方案，注意测量方案的可操作性。

2、要掌握三角形中的边角关系，熟悉解三角形的常见类型和相应解法，它们是求解实际测量问题的基础

3. 体会如何将实际问题转化为数学问题，用数学模型的解来解释实际问题的结果，提高自己的数学抽象思维能力，发展自己的数学建模的素养，提高分析问题与解决问题的能力。

编者注：带【*】的内容，初学有难度，为选学培优要求，视频 2 里有讲解。本课时请重点学习常规内容（视频 1）。