

探究边角关系---拓展提升 A 组题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 = bc$, 则角 A 是_____ (锐角, 钝角, 直角)

解析: $\because b^2 + c^2 - a^2 = b^2 + c^2 - bc = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3c^2}{4} > 0$

$\therefore \cos A > 0 \therefore 0 < A < \pi \therefore \angle A$ 是锐角

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A = 120^\circ$, $\sin B : \sin C = 3 : 2$, $S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}$, 求 $b =$ _____ 6

解析: $\because \sin B : \sin C = 3 : 2$ 所以由正弦定理变形知 $b : c = 3 : 2$ 设 $b = 3k$, $a = 2k$

$\because S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3} \therefore \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = 6\sqrt{3} \therefore bc = 24$ 即 $3k \cdot 2k = 24 \therefore k = 2 \therefore b = 6$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $(a+c)(a-c) = b(b+c)$, 则 $\angle A$ 的大小为 120°

解析: $\because (a+c)(a-c) = b(b+c) \therefore a^2 - c^2 = b^2 + bc$ 即 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$

$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}$

$\because 0 < A < 180^\circ \therefore \angle A = 120^\circ$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$

解析: $\frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2\sin A \cdot \cos A}{\sin C} = \frac{2a}{c} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{bc^2} = \frac{4 \times (5^2 + 6^2 - 4^2)}{5 \times 6^2} = 1$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b - c = 2$, $\cos B = -\frac{1}{2}$.

(I) 求 b, c 的值;

(II) 求 $\sin(B+C)$ 的值.

解析: (I) 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得

$$b^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

因为 $b = c + 2$,

$$\text{所以 } (c+2)^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

解得 $c = 5$.

所以 $b = 7$.

(II) 由 $\cos B = -\frac{1}{2}$ 得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理得 $\sin A = \frac{a}{b} \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $B + C = \pi - A$.

$$\text{所以 } \sin(B+C) = \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $c \sin A + \sqrt{3}a \cos C = 0$.

(I) 求 $\angle C$ 的大小;

(II) 若 $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解析：(I) 由正弦定理可得 $\sin C \sin A + \sqrt{3} \cos C \sin A = 0$.

因为 $\sin A > 0$, 所以 $\tan C = -\sqrt{3}$.

又因为 $0 < \angle C < \pi$,

所以 $\angle C = \frac{2\pi}{3}$.

(II) 由正弦定理得 $\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$,

又因为 $0 < \angle B < \frac{\pi}{3}$,

所以 $\angle B = \frac{\pi}{6}$, $\angle A = \pi - \angle B - \angle C = \frac{\pi}{6}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.