

# 探究边角关系——学习指南

## 一、学习目标：

1. 进一步熟悉新探究的边角关系与推论、三角形面积公式；熟悉公式的结构特点，能应用公式与定理解决三角形中的边角关系问题.
2. 观察题目中所给的边角关系，选择合理的定理、公式形式，实现边角的转化问题.
3. 体会数学中的转化思想，提高数学运算素养，逻辑推理素养.

## 二、学法指导：

我们在上周学习了三角形中的优美的边角关系与推论，三角形的面积公式，通过对一些问题的解决三角形的边角关系有了方法和思路。知道了利用新学习的边角关系，勾股定理等三角形的性质解决一部分边角关系。这节课我们就已经学习过的公式，进一步熟悉公式的结构，应用公式解决三角形中的边角关系问题；所以探究过程中的转化思想，数形结合思想和方程思想在解三角形问题当中的应用. 进一步提升数学运算素养，逻辑推理素养.

## 三、学习过程：

### (一) 复习回顾

我们上周学习了解三角形用到的优美的边角关系，从勾股定理推导出的边角关系以及推论。我们现在就一起总结一下从初中开始到现在我们遇到的这些解三角形过程中经常用到的公式，进一步理解其中的内在联系.

#### 1. 内角和定理： $A + B + C = \pi$

$$(1) C = \pi - (A + B) \Rightarrow \sin C = \sin(A + B); \cos C = -\cos(A + B)$$

$$(2) \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{(A + B)}{2} \Rightarrow \sin \frac{C}{2} = \cos\left(\frac{A + B}{2}\right); \cos \frac{C}{2} = \sin\left(\frac{A + B}{2}\right)$$

**2. 优美的边角关系：** 在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  为三角形外接圆半径)

**3. 说明：**

- (1) 对于任意三角形都成立；
- (2) 优美的边角关系在解题中有着广泛的应用，以下为常用变形：

$$\textcircled{1} a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$\textcircled{2} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R$$

$$\textcircled{3} \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$$

$$\textcircled{4} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\textcircled{5} S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

#### 4. 从勾股定理推导出的边角关系

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍。

$$\text{即: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

### 5. 从勾股定理推导出的边角关系的推论

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

### (二) 例题探究

#### 类型一：直接求边角

(1) 在  $\triangle ABC$  中, 若  $b=1$ ,  $c=\sqrt{3}$ ,  $\angle C=\frac{2}{3}\pi$ , 则  $a=$  \_\_\_\_\_

方法一:

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 即 } \frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \therefore \sin B = \frac{1}{2} \therefore 0 < B < \frac{\pi}{3} \therefore \angle B = \frac{\pi}{6} \therefore \angle A = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

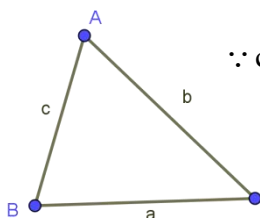
$$\therefore \angle B = \angle A \therefore a = b = 1$$

方法二:

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \therefore (\sqrt{3})^2 = a^2 + 1^2 - 2a \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \therefore a^2 + a - 2 = 0 \therefore (a+2)(a-1) = 0$$

$$\therefore a > 0 \therefore a = 1$$

(2) 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=3$ ,  $BC=\sqrt{13}$ ,  $AC=4$ , 则  $\angle A=$ \_\_\_\_\_,  $\triangle ABC$  的面积是\_\_\_\_\_.


$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9+16-13}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2} \therefore 0 < A < \pi \therefore \angle A = \frac{\pi}{3}$$
$$\therefore S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

(3) 边长为 5, 7, 8 的三角形的最大角与最小角的和是 ( )

(A)  $90^\circ$       (B)  $120^\circ$       (C)  $135^\circ$       (D)  $150^\circ$

设  $\triangle ABC$  的三个内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$  且令  $a=8, b=7, c=5$

$$\therefore a > b > c \therefore \text{最大角是 } \angle A, \text{ 最小角是 } \angle C \therefore \angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{64+25-49}{2 \times 8 \times 5} = \frac{1}{2} \therefore 0 < B < 180^\circ \therefore \angle B = 60^\circ \therefore \angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B = 120^\circ$$

反思感悟：直接应用公式解决三角形的相关量，找准公式，选对公式。

#### 类型二：判断 $\triangle$ 的形状.

(1) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a=7, b=5, c=3$ , 判断  $\triangle ABC$  的形状。

分析:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow A \text{ 为 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 角 } \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 是 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 三角形}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow A \text{ 为 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 角 } \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 是 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 三角形}$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow A \text{ 为 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 角 } ? \triangle ABC \text{ 是 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 三角形}$$

显然前两个都可以互推, 最后一个不行,  $\therefore a^2 < b^2 + c^2 \therefore \cos A > 0$  能判断出  $\angle A$  是锐角, 但是三角形中只有一个角是锐角, 不能说明  $\triangle ABC$  是锐角三角形。但是如果这个角是三角形中的最大角就可以了, 因为最大角是锐角, 其他角也一定是锐角。由此, 像判断三角形形状的习题可以选择判断三角形的最大角是什么角就能知道该三角形的形状了。

$$\because a > b > c \therefore \text{最大角是 } \angle A \therefore b^2 + c^2 - a^2 = 25 + 9 - 49 = -14 < 0 \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0$$

$\therefore \angle A$  是钝角  $\therefore \triangle ABC$  是钝角三角形。

反思感悟: 判断三角形形状的习题可以选择判断三角形的最大角是什么角就能知道该三角形的形状了。

(2) 已知  $\triangle ABC$  满足条件  $b \cos A = a \cos B$ , 判断  $\triangle ABC$  的形状。

$$\text{方法一: } \because a = 2R \sin A, b = 2R \sin B \therefore b \cos A = a \cos B \therefore 2R \sin B \cos A = 2R \sin A \cos B$$

$$\therefore \sin B \cos A - \sin A \cos B = 0 \therefore \sin(B - A) = 0 \therefore B - A = 0 \text{ 即 } B = A \therefore \triangle ABC \text{ 是等腰三角形}$$

$$\text{方法二: } \because b \cos A = a \cos B$$

$$\therefore b \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = c^2 + a^2 - b^2 \therefore b^2 - a^2 = 0 \therefore (b - a)(b + a) = 0 \therefore b = a$$

$\therefore \triangle ABC$  是等腰三角形

### 【\*】拓展探索

【\*】(1) 已知  $\triangle ABC$  的三个内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 角  $B = \frac{\pi}{3}$  且  $a + c = \sqrt{3}b$ , 判断  $\triangle ABC$  的形状。

$$\text{方法一: } \because a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C \text{ 又 } \because a + c = \sqrt{3}b$$

$$\therefore 2R \sin A + 2R \sin C = \sqrt{3} \times 2R \sin B$$

$$\therefore \sin A + \sin C = \frac{3}{2} \therefore C = \frac{2\pi}{3} - A \therefore \sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = \frac{3}{2} \therefore \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \therefore \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore 0 < A < \frac{2\pi}{3} \therefore \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \therefore A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } A + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } A = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } A = \frac{\pi}{6} \text{ 时 } C = \pi - (A + B) = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形

$$\textcircled{2} \text{ 当 } A = \frac{\pi}{2} \text{ 时 } \therefore \triangle ABC \text{ 是直角三角形}$$

综上:  $\therefore \triangle ABC$  是直角三角形

$$\text{方法二: } \because a + c = \sqrt{3}b$$

$$\therefore (a + c)^2 = 3b^2 \therefore a^2 + c^2 + 2ac = 3b^2 \therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \therefore b^2 = a^2 + c^2 - ac$$

$$\therefore 3(a^2 + c^2 - ac) = a^2 + c^2 + 2ac \therefore 2a^2 - 5ac + 2c^2 = 0 \therefore (2a - c)(a - 2c) = 0$$

$$\therefore c = 2a \text{ 或 } a = 2c$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } c = 2a \text{ 时 } 3a = \sqrt{3}b \text{ 即 } b = \sqrt{3}a \therefore a^2 + b^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = (2a)^2 = c^2 \therefore C = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形

$$\textcircled{2} \text{ 当 } a = 2c \text{ 时 } 3c = \sqrt{3}b \text{ 即 } b = \sqrt{3}c \therefore c^2 + b^2 = c^2 + (\sqrt{3}c)^2 = (2c)^2 = a^2 \therefore A = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形

反思感悟: 利用好题中给的相关条件, 通过边化角, 角化边解决相关的问题.

$$\text{【*】(2) 在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle B = \frac{\pi}{4}, AC = \sqrt{10}, \cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(I) 求  $BC$  边的长; (II) 记  $AB$  的中点为  $D$ , 求中线  $CD$  的长

$$\text{方法一: (I) } \because \cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 且 } 0 < C < \pi \therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin A = \sin(B + C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \therefore BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{(II) } \because \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \therefore AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \therefore BD = \frac{1}{2} AB = 1$$

$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 中 } \because CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos B \therefore CD^2 = 1^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 13$$

$$\therefore CD = \sqrt{13}$$

$$\text{方法二: (I)} \because \cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 且 } 0 < C < \pi \therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \therefore AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C \therefore 2^2 = BC^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \times \sqrt{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot BC$$

$$\therefore BC^2 - 4\sqrt{2}BC + 6 = 0 \therefore (BC - \sqrt{2}) \cdot (BC - 3\sqrt{2}) = 0 \therefore BC = \sqrt{2} \text{ 或 } BC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{当 } BC = \sqrt{2} \text{ 时 } \because AC > AB > BC \therefore \angle B \text{ 为最大角 } \therefore \angle C < \angle B, \angle A < \angle B \text{ 即 } \angle C < \frac{\pi}{4}, \angle A < \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C < \frac{3\pi}{4} < \pi \therefore BC = \sqrt{2} \text{ 不合题意.}$$

$$\therefore BC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{(II)} \therefore BD = \frac{1}{2} AB = 1$$

$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 中 } \because CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos B \therefore CD^2 = 1^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 13$$

$$\therefore CD = \sqrt{13}$$

$$\text{方法三: (I)} \because \cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 且 } 0 < C < \pi \therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \therefore AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

$$\therefore \cos A = -\cos(B+C) = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \therefore BC^2 = 2^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{10} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = 18$$

$$\therefore BC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{(II)} \therefore BD = \frac{1}{2} AB = 1$$

$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 中 } \because CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos B \therefore CD^2 = 1^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 13$$

$$\therefore CD = \sqrt{13}$$

反思感悟：分析题目中的条件，求解之前，由题中的已知确定好结果解的个数，看题中的已知条件是 SSS 还是 AAS 还是 ASA 还是 SSA，做到心中有数，注意取舍。

【\*】(3) 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  的对边，且  $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C - b - c = 0$ 。

(I) 求角  $A$ ；

(II) 若  $a = 2$ ，则  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ ，求  $b, c$ 。

$$(I) \because a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C \text{ 且 } a \cos C + \sqrt{3}a \sin C - b - c = 0$$

$$\therefore 2R \cdot \sin A \cdot \cos C + 2R \cdot \sin A \cdot \sqrt{3} \sin C - 2R \cdot \sin B - 2R \cdot \sin C = 0$$

$$\therefore \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin B - \sin C = 0$$

$$\therefore \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin(A+C) - \sin C = 0$$

$$\therefore \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - (\sin A \cos C + \cos A \sin C) - \sin C = 0$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin A \sin C - \cos A \sin C - \sin C = 0 \therefore \sin C (\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1) = 0 \therefore \sin C \left( 2 \sin \left( A - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right) = 0$$

$$\because 0 < C < \pi \therefore \sin C \neq 0 \therefore 2 \sin \left( A - \frac{\pi}{6} \right) - 1 = 0$$

$$\therefore \sin \left( A - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \because 0 < A < \pi \therefore -\frac{\pi}{6} < A - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \therefore A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ 即 } A = \frac{\pi}{3}$$

$$(II) \because S_{\triangle ABC} = \sqrt{3} \therefore \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \sqrt{3} \therefore bc = 4$$

$$\because a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \therefore 2^2 = b^2 + c^2 - 2 \times 4 \times \frac{1}{2} \therefore b^2 + c^2 = 8$$

$$\therefore (b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 8 + 2 \times 4 = 16 \therefore b+c > 0 \therefore b+c = 4$$

$$\therefore b = c = 2$$

反思感悟：对于复杂的题目，对于综合知识的考查比较多，同学们呢在做题的过程中注意灵活运用，利用好边角关系选好公式解决问题。

编者注：带【\*】的内容，初学有难度，为选学培优要求，视频 2 里有讲解。本课时请重点学习常规内容（视频 1）。