

三角形中优美的边角关系

学习任务单

一、学习目标

1. 由直角三角形的边角关系出发得到猜想, 通过对锐角和钝角三角形边角关系推理论证, 证明猜想的过程中提高逻辑推理和数学运算核心素养;
2. 能运用猜想结论解决三角形的边角关系问题;
3. 体会到从特殊到一般、划归与转化和分类讨论的数学思想.

二、学法指导

猜想是数学思维的一种重要形式, 它为促进数学发展做出了巨大的贡献, 例如著名的欧拉定理四色问题、费马猜想、歌德巴赫猜想等. 数学猜想是一种假设, 它的合理性与正确性需要我们进行严格的推理论证, 所以具有探索真理的作用. 由特殊到一般的“先猜后证”是发现数学规律的一般模式, 下面请同学们认真阅读材料, 理解猜想, 证明猜想, 运用猜想.

任务一: 阅读材料, 理解猜想

三角形是平面几何中一个最常见的几何图形之一, 我们常常研究其边角关系. 我们在学习三角形全等问题时知道, 当给定三角形的 SSS, SAS, ASA, AAS 条件时, 三角形是全等的, 即此时三角形是唯一确定的. 当三角形确定后, 其边角也是确定的, 那么, 这些边角有何数量关系呢?

以直角三角形为例:

在 $Rt\triangle ABC$ 中, 设角 $C = 90^\circ$, 角 A, B, C 所对的边长分别 a, b, c .

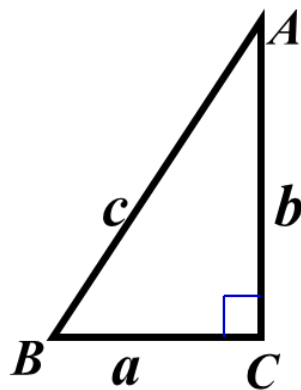
$$\text{则 } \sin A = \frac{a}{c}, \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\text{从而 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c,$$

又因为 $C = 90^\circ$, 所以 $\sin 90^\circ = 1$, 即 $\sin C = 1$,

$$\text{所以 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

那么对于一般的三角形, 上述边角的数量的关系式还成立吗?



于是我们得到**猜想**: 在任意 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 则各边和它所

对角的正弦的比相等, 即: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

任务二: 推理运算, 证明猜想

(1) 若 $\triangle ABC$ 中为锐角三角形, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ,

请证明: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

(2) 若 $\triangle ABC$ 中为钝角三角形, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ,

请证明: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

问题 1: 如何将一般三角形中的问题转化到直角三角形中?

作高  直角三角形

问题 2: 这个比值是确定的吗? 你能计算出来吗?

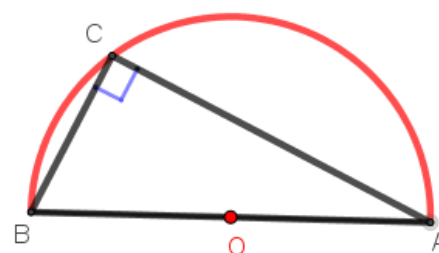
思考 1: 当三角形的一边及其对角确定之后, 此边所对应的顶点如何运动?

由此想到三角形的外接圆, 仿照上面的研究方法, 我们还是由特殊到一般来探究这个问题。

若 $\triangle ABC$ 直角三角形, 角 C 为直角, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的

半径为 R , 则 $\frac{c}{\sin C} = 2R$

所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

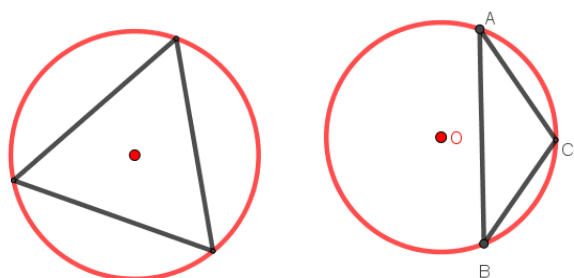


(i) 若 $\triangle ABC$ 中为锐角三角形, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的

半径为 R , 如何证明?

(II) 若 $\triangle ABC$ 中为钝角三角形, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R , 如何证明?

类比前面的研究方法需要构造直角  作直径



我们证明了这个边角的关系式是正确的，那么请同学们利用这个关系式尝试解决下面的问题.

问题 1: 已知在 $\triangle ABC$ 中, $c = 10, A = 45^\circ, C = 30^\circ$, 求 a

变式: 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $c = 10, A = 45^\circ, B = 105^\circ$, 求 a

小结:

问题 2: 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B = 30^\circ, b = \sqrt{2}, c = 2$, 求边 a

小结: