

高二年级数学函数的性质进一步研究第5课时拓展提升答案

1. B

【详解】

$$\because f(x) = (x^2 - 2x)e^x, \therefore f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2)e^x.$$

解不等式 $f'(x) < 0$, 即 $x^2 - 2 < 0$, 得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$;

解不等式 $f'(x) > 0$, 即 $x^2 - 2 > 0$, 得 $x < -\sqrt{2}$ 或 $x > \sqrt{2}$.

所以, 函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, +\infty)$,

单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

令 $f(x) > 0$, 即 $x^2 - 2x > 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > 2$;

令 $f(x) < 0$, 即 $x^2 - 2x < 0$, 得 $0 < x < 2$.

所以, 符合条件的函数 $y = f(x)$ 为 B 选项中的图象, 故选 B.

2. C

【详解】

$$\text{令 } F(x) = 2f(x) - x, \text{ 则 } F'(x) = 2f'(x) - 1 > 0$$

因此: $F(x)$ 在 R 上单调递增

$$\because F(-1) = 2f(-1) + 1 = 1, 2f(x) < x + 1$$

$$\therefore F(x) = 2f(x) - x < 1 = F(-1)$$

即: $\therefore x < -1$

故选:C

3. D

【详解】

因为 α, β 为锐角三角形的两个内角, 所以 $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{2} - \beta > 0$,

$$\sin \alpha > \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta, \text{ 同理 } \sin \beta > \cos \alpha,$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{f(x)}{x^2}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} = \frac{f'(x) - \frac{2f(x)}{x}}{x^2},$$

因为函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 恒有 $f'(x) > \frac{2f(x)}{x}$, 所以 $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数,

所以 $g(\sin \alpha) > g(\cos \beta)$, 即 $\frac{f(\sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} > \frac{f(\cos \beta)}{\cos^2 \beta}$, $\cos^2 \beta f(\sin \alpha) > \sin^2 \alpha f(\cos \beta)$,

A 错.

所以 $g(\sin \beta) > g(\cos \alpha)$, 即 $\frac{f(\sin \beta)}{\sin^2 \beta} > \frac{f(\cos \alpha)}{\cos^2 \alpha}$, $\sin^2 \beta f(\cos \alpha) < \cos^2 \alpha f(\sin \beta)$,

D 正确.

故选: D.

4.

【详解】

由题意得: $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2}{x}ax + (2a+1) = \frac{ax^2 + (2a+1)x + 2}{x} = \frac{(x+2)(ax+1)}{x} (x > 0)$$

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

当 $a < 0$ 时, 若 $x \in \left(0, -\frac{1}{a}\right)$, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增;

若 $x \in \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减

综上所述: 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减