

函数的性质进一步研究第 5 课时学习指南

【学习目标】

- 1、结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；会利用导数求函数的单调区间；
- 2、通过对“函数的单调性与其导函数的关系”的探究，经历由直观到抽象，由特殊到一般的过程，感悟蕴含其中的数形结合思想；
- 3、通过图象、函数单调性的定义与导数方法研究函数性质的比较，体会导数方法在研究函数性质时的一般性、有效性和优越性，感受数学自身发展的一般规律。

【学法指导】

学习时要抓住两条线，一是知识线，即函数的单调性与导数的关系；二是方法线，即如何研究函数的单调性与导数关系的方法。观看视频过程中，就老师提出的问题，要先独立思考。如果自己的猜想和老师所讲的不一样，那么按照研究问题的一般思路，就自己的想法进行探究，看看自己的猜想是否正确。如果不正确，原因是什么等等。具体做法是

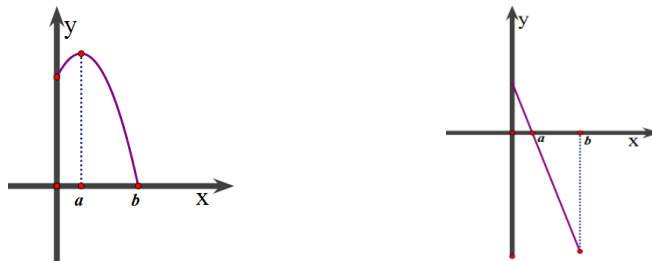
- 1、回归教材，深刻理解；

阅读教材，了解函数的单调性和导数的关系。限时 15 分钟，完成问题清单中的内容。

- 2、注重化归与转化的思想，数形结合的思想。

【问题清单】

问题 1 图 1 表示高台跳水运动员的高度 h 随时间 t 变化的函数 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$ 的图像，图 2 表示高台跳水运动员的速度 v 随时间 t 变化的函数 $v(t) = h'(t) = -9.8t + 6.5$ 的图像。运动员从起跳到最高点，以及从最高点到入水这两段时间的运动状态有什么区别？由此请同学们猜想在某区间内，导数的符号与原函数单调性的关系。



问题 2 在某区间 (a, b) 内，如果导数等于 0，那么此时函数的单调性如何呢？

问题 3 判断 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 的单调性，并求出单调区间

问题 4 之前我们通过实践检验了我们发现的法则的正确性。你能解释这个发现的正确性？
比如从导数的几何意义，或者单调性的定义等方面。

【知识梳理】

1. 在某区间 (a, b) 内，若 $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在此区间内单调递增；
2. 在某区间 (a, b) 内，若 $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在此区间内单调递减；
3. 在某区间 (a, b) 内，若 $f'(x) = 0$ ，则 $f(x)$ 在此区间内是常值函数。

【典型问题】

例 1：判断 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 的单调性，并求出单调区间

解： $f'(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

令 $f'(x) > 0$ 时，解得 $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ；令 $f'(x) < 0$ 时，解得 $x \in (-2, 1)$

所以 $f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty, -2)$ 和 $(1, +\infty)$ ； $f(x)$ 的递减区间是 $(-2, 1)$

注意：单调区间不能取并集，即不能写成函数在 $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ 这个范围内单调递增。

【方法规律】

1. 探究问题的一般套路：①观察②归纳、猜想③操作确认④论述证明⑤实践应用
2. 利用导数研究函数的单调性的方法步骤：
 - ①求函数的导函数；
 - ②在定义域内求解导函数大于 0 的区间和导函数小于 0 的区间；
 - ③导函数大于 0 的区间为原函数的增区间；导函数小于 0 的区间为原函数的减区间；
 - ④注意单调区间不要用并集符号连接。