

第 26 课时几何图形的探秘学习指南

一、学习目标：

1. 通过对几种平行四边形的回顾与思考，使学生梳理所学的知识，系统地复习平行四边形与各种特殊平行四边形的定义、性质、判定方法等；
2. 通过对圆知识的重新整合，设计依“圆”而思的开放性问题，引导学生展开联想，使学生回顾知识。
3. 感悟“类比”、“特殊到一般”、“化归与转化”、“数形结合”等思想方法.

二、学法指导：

首先观看视频，在老师提问的地方可以先暂停视频，独立思考。然后再继续观看。对于借助信息技术发现的一些四边形和圆的性质，可以尝试独立证明。

在观看视频结束后，回忆学习内容。尝试回答下列问题

本节课我学到了什么知识？我是通过什么方法获得这些知识的？

三、学习过程：

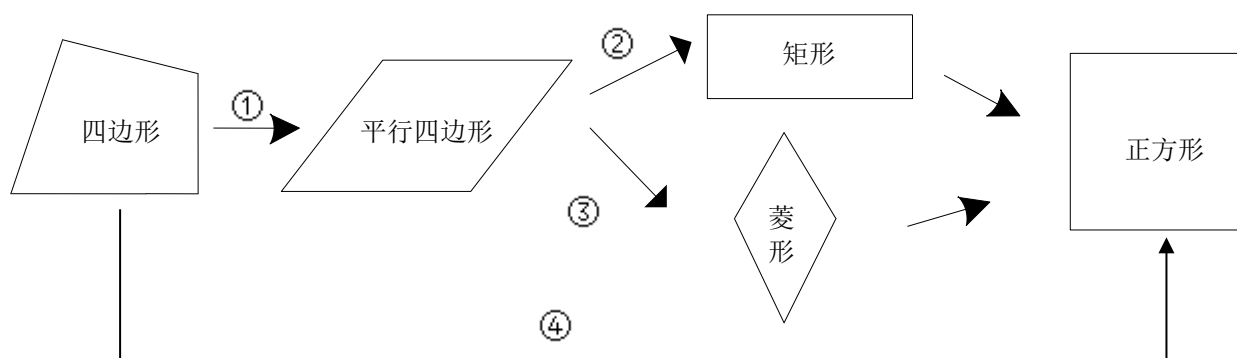
【四边形】

一、构建知识体系，优化知识结构，学会系统思考

（一）构建图形定义网络

沿着“平行四边形—矩形、菱形—正方形”的研究路线来动态地重温概念学习的关键过程；另一方面梳理图形的定义，进而形成图形定义网络，明确图形概念的内涵与外延。

问题 1：我们是如何获得这些特殊的四边形的呢？在对应序号处填上对应条件



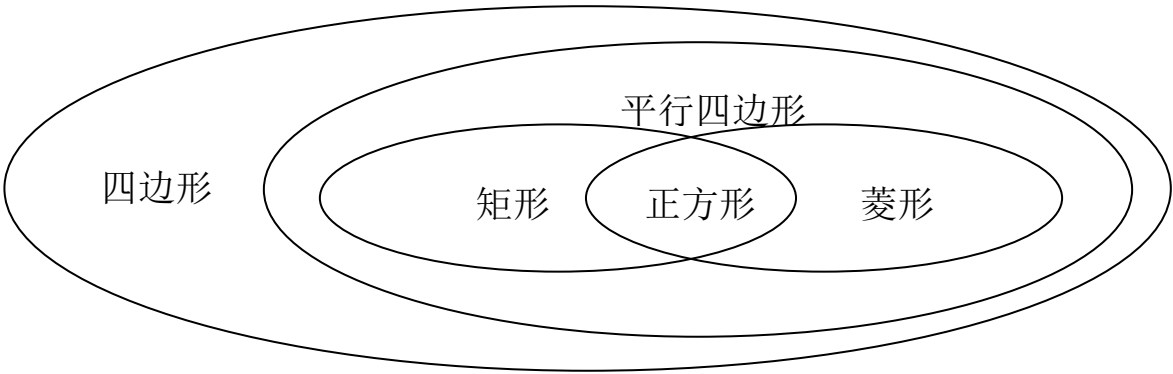
①两组对边分别平行的四边形是平行四边形

②有一角是直角的平行四边形是矩形

③一组邻边相等的平行四边形是菱形

④四边都相等，四个角都是直角的四边形是正方形

问题 2：请用 Venn 图表示这些四边形之间具有怎样的关系？



（二）构建图形性质定理网络

按照“平行四边形—矩形、菱形—正方形”的研究路线梳理图形的性质定理。此外，结合图形进一步地明确图形间蕴含的“一般与特殊”的关系，即特殊图形除了具有一般图形的一切性质外，还具有属于自己的特殊性质。

问题 3：你能按照问题 1 的顺序从“边、角、对角线”的角度来梳理本章所学图形的性质定理吗？

四边形	边	角	对角线
平行四边形	对边平行且相等	对角相等邻角互补	对角线互相平分
矩形	对边平行且相等	四个角都是直角	对角线互相平分且相等
菱形	对边平行且相等	对角相等邻角互补	对角线互相垂直平分， 且每一条对角线平分一组对角

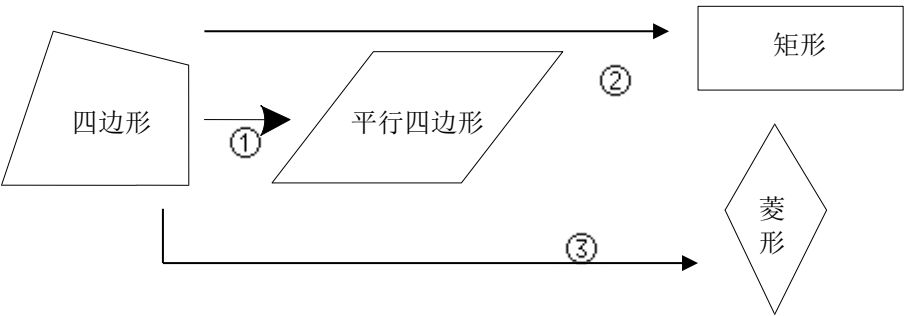
正方形	对边平行且相等	四个角都是直角	对角线互相垂直平分且相等，每一条对角线平分一组对角
-----	---------	---------	---------------------------

（三）构建图形判定定理网络

在明确“原图形是什么四边形”的基础上，梳理相关图形的判定定理，让学生在命题条件的逐步加强过程中进一步地体会图形“一般与特殊”之间的关系。

问题 4：接下来，我们将继续我们的复习旅程，我们要将视线锁定在这些图形的判定定理上。我们是从图形性质定理的逆命题讨论中研究判定定理的。大家不难发现，要想正确地使用图形的判定定理，关键是需要明确“原图形是什么四边形”。

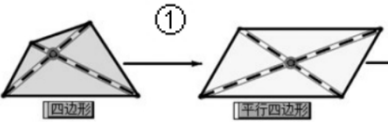
问题①：如果原图形是四边形，你能从“边、角”的角度来梳理本章所学图形的判定定理吗？



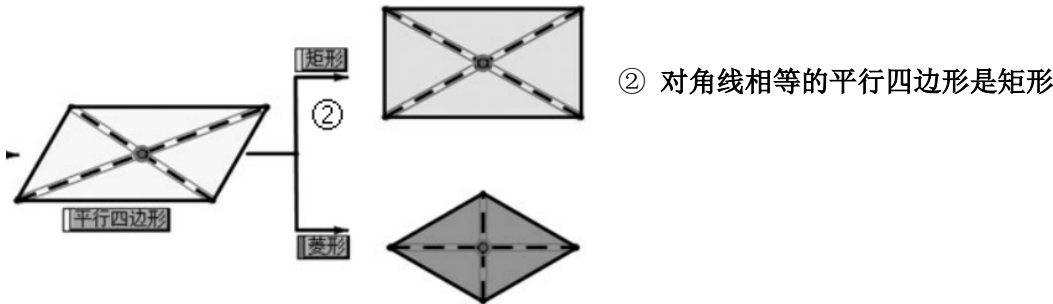
- ① 1、两组对边分别相等的四边形是平行四边形
- 2、一组对边平行且相等的四边形是平行四边形
- 3、两组对角分别相等的四边形是平行四边形
- ② 三个角是直角的四边形是矩形
- ③ 四条边都相等的四边形是菱形

问题②：如果原图形是四边形，你能从“对角线”的角度来梳理本章所学图形的判定定理吗？

- ① 对角线互相平分的四边形是平行四边形



问题③ 如果原图形是平行四边形，你能从“对角线”的角度来梳理本章所学图形的判定定理吗？



③ 对角线互相垂直的平行四边形是菱形

二、 动态探究问题，把握问题本质，学会数学思考

【探究 1】探究活动：在 $\square ABCD$ 中，构造另一个平行四边形，你有多少种方法。画出图形，写出条件与结论，并挑其中几种方法证明它（至少两种）

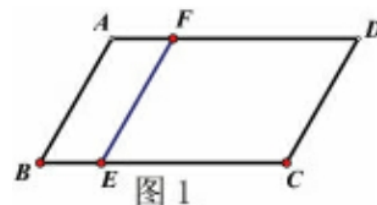
学生活动：

1. 决定目的：构造出一个平行四边形，证明
2. 拟定计划：利用原有四边形的性质，添加必要条件，形成另一个平行四边形。从边角对角线入手，分类考虑。
3. 执行计划：

①在 $\square ABCD$ 中

条件： $AB \parallel EF$

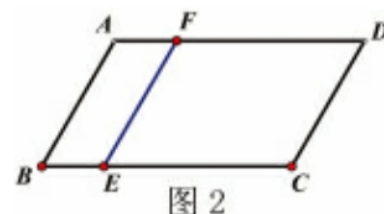
结论：四边形 $ABEF$ 是平行四边形



②在 $\square ABCD$ 中

条件： $AF = BE$

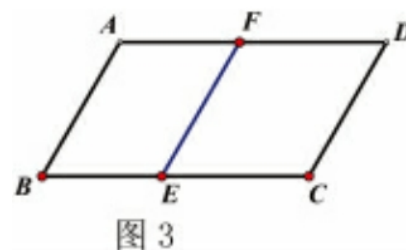
结论：四边形 $ABEF$ 是平行四边形



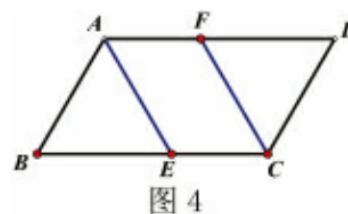
【*】③在 $\square ABCD$ 中

条件： E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点

结论：四边形 $ABEF$ 是平行四边形



【*】④在 $\square ABCD$ 中



条件: E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点

结论: 四边形 $AECF$ 是平行四边形

【*】⑤在 $\square ABCD$ 中

条件: $AE \perp BC$, $CF \perp AD$

结论: 四边形 $AECF$ 是平行四边形

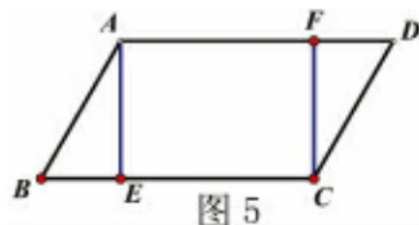


图 5

【*】⑥在 $\square ABCD$ 中

条件: AE 、 CF 分别是 $\angle BAD$ 、 $\angle BCD$ 的角平分线

结论: 四边形 $AECF$ 是平行四边形

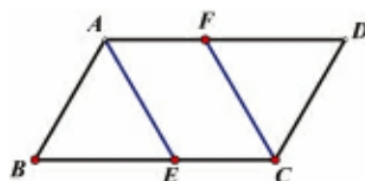


图 6

【*】⑦在 $\square ABCD$ 中

条件: E 、 F 、 G 、 H 分别是 OA 、 OB 、 OC 、 OD 的中点

结论: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

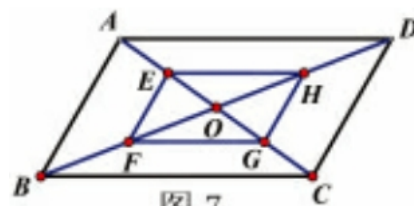


图 7

【*】⑧在 $\square ABCD$ 中

条件: $AH = CF$, $BE = GD$

结论: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

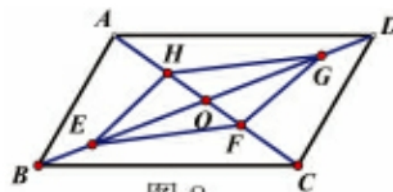


图 8

【*】⑨在 $\square ABCD$ 中

条件: $AH = CF$ (或 H 、 F 分别是 OA 、 OC 的中点)

结论: 四边形 $BFDH$ 是平行四边形

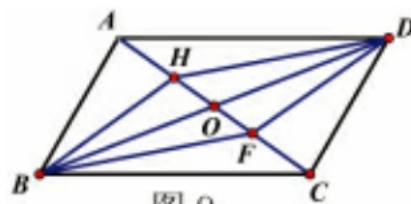


图 9

【*】⑩在 $\square ABCD$ 中

条件: $BH \perp AC, DF \perp AC$

结论: 四边形 $BFDH$ 是平行四边形

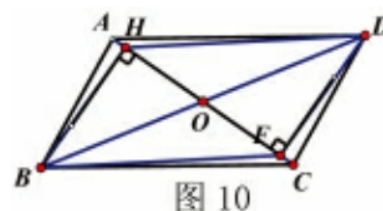


图 10

【*】11 在 $\square ABCD$ 中

条件: AN, BP, CQ, DM 分别是 $ABCD$ 四个内角的角平分线

结论: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

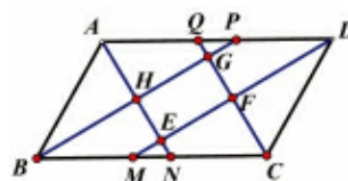


图 11

12 在 $\square ABCD$ 中

条件: E, F, G, H 分别是 BC, CD, AD, AB 的中点

结论: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

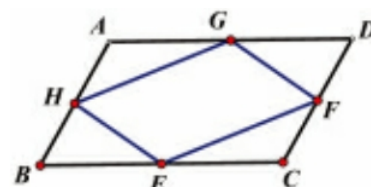


图 12

变式练习:

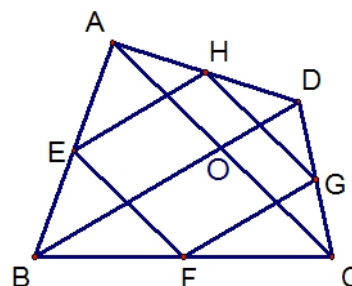
如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是 BC, CD, AD, AB 的中点, 请判断四边形 $EFGH$ 的形状, 并说明理由 $EFGH$

(1) 添加条件 $AC=BD$, 则四边形 $EFGH$ 为菱形;

(2) 添加条件 $AC \perp BD$, 则四边形 $EFGH$ 为矩

形;

(3) 添加条件 $AC \perp BD$ 且 $AC=BD$, 则四边形 $EFGH$ 为正方形。



【圆】

一、动手操作、激活思维

问题 1: 制作一个圆形纸片, 老师找不到这个圆的圆心, 如果只用折叠的办法, 你能找到它的圆心么?

对折两次, 折痕的交点为圆心

问题 2: 两条折痕其实是圆的什么? 对折后能完全重合, 说明圆具有什么性质?

两条折痕其实是圆的直径

1、圆的轴对称性

圆是轴对称图形, 经过圆心的每一条直线都是它的对称轴。

2、圆的中心对称性

圆是以圆心为对称中心的中心对称图形。

问题 3: 这两条折痕所夹的弧相等么? 为什么?

在一个圆中, 只要圆心角相等, 它们所对的弧一定相等, 圆具有旋转不变性

二、动脑思考、复习回顾

问题 1: 圆是所有到顶点的距离等于定长的点的集合。圆周上有无数个点, 不妨在圆周上取一点 P (如图 1), 根据圆周上的这一点 P , 请写出圆的定义

集合形式的概念:

1、圆可以看作是到定点的距离等于定长的点的集合;

轨迹形式的概念:

1、圆: 到定点的距离等于定长的点的轨迹就是以定点为圆心, 定长为半径的圆;

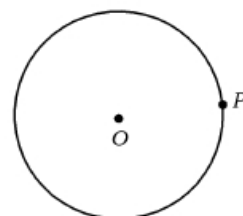


图 1

问题 2: 如果圆周上任意取两个点 A 、 P , 你能想到圆的哪些知识。

(提醒: 弧、弦、弦心距、圆心角之间的定义及关系定理)

一 弦、弧等与圆有关的定义

1 弦

连接圆上任意两点的线段叫做弦。(如图中的 AB)

2 直径

经过圆心的弦叫做直径。(如途中的 CD)

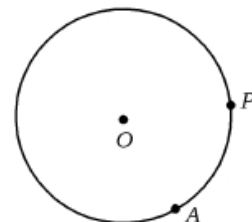
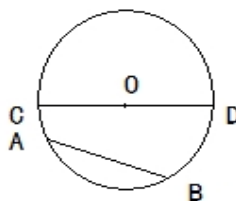


图 2

直径等于半径的 2 倍。

3 半圆

圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做半圆。

4 弧、优弧、劣弧

圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧。

弧用符号“ $\widehat{\quad}$ ”表示，以 A, B 为端点的弧记作“ $\widehat{AB}$ ”，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”。

大于半圆的弧叫做优弧（多用三个字母表示）；小于半圆的弧叫做劣弧（多用两个字母表示）

二 弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

1、圆心角

顶点在圆心的角叫做圆心角。

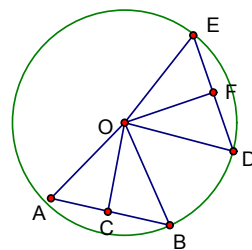
2、弦心距

从圆心到弦的距离叫做弦心距。

3、弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

推论：在同圆或等圆中，如果两个圆的圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等。



问题 3：根据圆周上任意三个点，你能想到圆的哪些知识。

(提醒：圆周角定理及其推论)

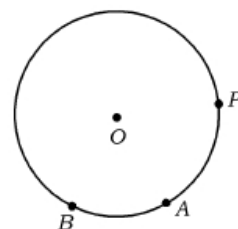


图 3

一 圆周角定理

1、圆周角定理：同弧所对的圆周角等于它所对的圆心的角的一半。

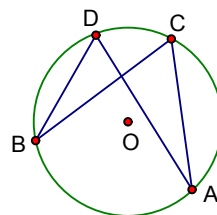
即： $\because \angle AOB$ 和 $\angle ACB$ 是弧 AB 所对的圆心角和圆周角

$$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$$

2、圆周角定理的推论：

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧是等弧；

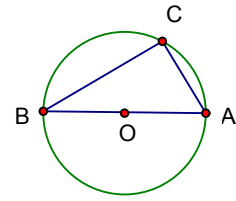
即：在 $\odot O$ 中， $\because \angle C$ 、 $\angle D$ 都是所对的圆周角



$$\therefore \angle C = \angle D$$

推论 2: 半圆或直径所对的圆周角是直角; 圆周角是直角所对的弧是半圆, 所对的弦是直径。

即: 在 $\odot O$ 中, $\because AB$ 是直径 或 $\because \angle C = 90^\circ$
 $\therefore \angle C = 90^\circ$ $\therefore AB$ 是直径



问题 4: 根据圆周上任意四个点, 你能想到圆的哪些知识。

(提醒: 垂径定理及其推论)

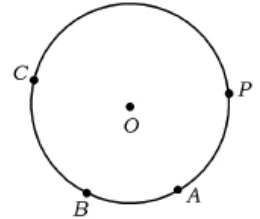


图 4

一、垂径定理

垂径定理: 垂直于弦的直径平分弦且平分弦所对的弧。

推论 1: (1) 平分弦 (不是直径) 的直径垂直于弦, 并且平分弦所对的两条弧;

(2) 弦的垂直平分线经过圆心, 并且平分弦所对的两条弧;

(3) 平分弦所对的一条弧的直径, 垂直平分弦, 并且平分弦所对的另一条弧

以上共 4 个定理, 简称 2 推 3 定理: 此定理中共 5 个结论中, 只要知道其中 2 个即可推出其它 3 个结论, 即:

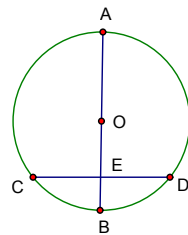
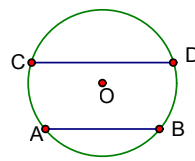
① AB 是直径 ② $AB \perp CD$ ③ $CE = DE$ ④ 弧 BC = 弧 BD ⑤ 弧 AC = 弧 AD

中任意 2 个条件推出其他 3 个结论。

推论 2: 圆的两条平行弦所夹的弧相等。

即: 在 $\odot O$ 中, $\because AB \parallel CD$

$\therefore$ 弧 AC = 弧 BD



二、圆内接四边形

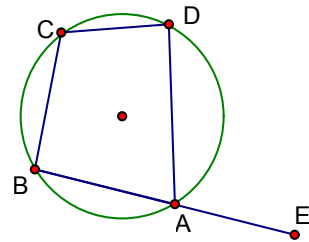
圆的内接四边形定理: 圆的内接四边形的对角互补, 外角等于它的内对角。

即: 在 $\odot O$ 中,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是内接四边形

$\therefore \angle C + \angle BAD = 180^\circ$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\angle DAE = \angle C$



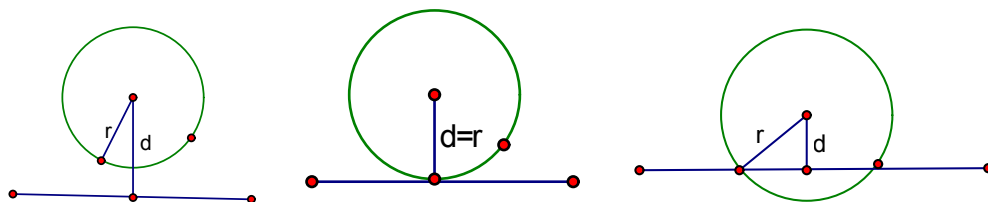
问题 5: 点、线、圆和圆的位置关系有哪几种? 如何断他们之间的位置关系

一、点与圆的位置关系

- 1、点在圆内 $\Rightarrow d < r \Rightarrow$ 点 C 在圆内;
- 2、点在圆上 $\Rightarrow d = r \Rightarrow$ 点 B 在圆上;
- 3、点在圆外 $\Rightarrow d > r \Rightarrow$ 点 A 在圆外;

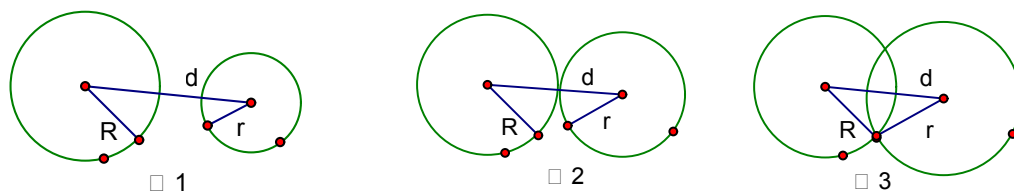
二、直线与圆的位置关系

- 1、直线与圆相离 $\Rightarrow d > r \Rightarrow$ 无交点;
- 2、直线与圆相切 $\Rightarrow d = r \Rightarrow$ 有一个交点;
- 3、直线与圆相交 $\Rightarrow d < r \Rightarrow$ 有两个交点;

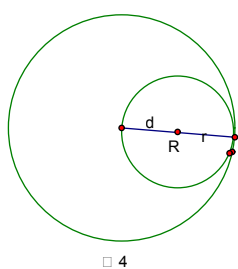


三、圆与圆的位置关系

- 外离 (图 1) $\Rightarrow$ 无交点 $\Rightarrow d > R + r$;
- 外切 (图 2) $\Rightarrow$ 有一个交点 $\Rightarrow d = R + r$;
- 相交 (图 3) $\Rightarrow$ 有两个交点 $\Rightarrow R - r < d < R + r$;
- 内切 (图 4) $\Rightarrow$ 有一个交点 $\Rightarrow d = R - r$;
- 内含 (图 5) $\Rightarrow$ 无交点 $\Rightarrow d < R - r$;

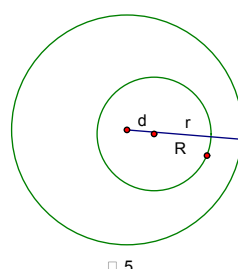


问
的哪些知
一 切 线



□ 4

题 6: 对
识?
的 性 质



□ 5

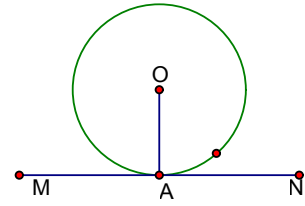
于切线, 能联想到圆
与判定定理

(1) 切线的判定定理：过半径外端且垂直于半径的直线是切线；

两个条件：过半径外端且垂直半径，二者缺一不可

即：∵ $MN \perp OA$ 且 MN 过半径 OA 外端

∴ MN 是 $\odot O$ 的切线



(2) 性质定理：切线垂直于过切点的半径（如上图）

二切线长定理

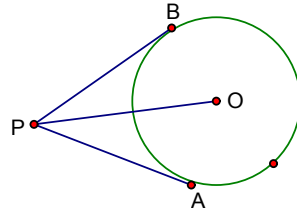
切线长定理：

从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，这点和圆心的连线平分两条切线的夹角。

即：∵ PA 、 PB 是圆的两条切线

∴ $PA = PB$

PO 平分 $\angle BPA$



三．探索发现，深化提高

【探究 2】灵活建构圆

思考：那些条件可以建构圆？

问题①： $OA = 1$ ， $AB \perp OB$ ，求 OB 的取值范围。

∵ $AB \perp OB$

∴ 点 B 在以 OA 为直径的圆周上

如图所示，易知 $OB \in [0, 1]$

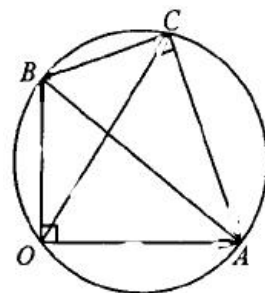
【*】问题 ②： $OA = OB = 1$ ， $OA \perp OB$ ， $AC \perp BC$ ，求 OC 的取值范围。

$$\because OA \perp OB, AC \perp BC$$

$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆周上

故 O, A, B, C 四点共圆

如图所示，易知 OC 的最大值等于直径长 $\sqrt{2}$



【*】问题③： $OA = OB = 1$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，求 OC 的最大值。

四边形 $OACB$ 分为凸四边形和凹四边形

四边形 $OACB$ 分为凹四边形时

点 A, B, C 在以点 O 为圆心，1 为半径的圆上， OC 的最大值为 1

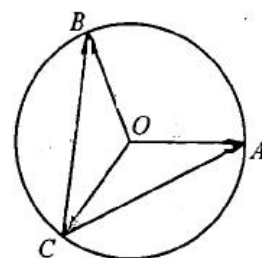
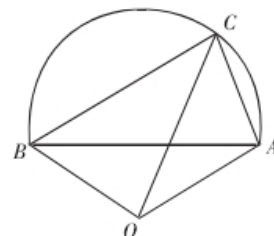
四边形 $OACB$ 分为凸四边形时

$$\because \angle AOB = 120^\circ, \angle ACB = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOB + \angle ACB = 180^\circ$$

故 O, A, B, C 四点共圆

如图所示，易知 OC 的最大值等于直径长 2



【*】问题④： $OA = OB = 2$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ， D 为 OB 中点， $AC \perp DC$ ，求 CB 的最小值。

$$\because AC \perp DC$$

$\therefore$ 点 C 在以 AD 为直径的圆周上

如图所示，易知 CB 的最小值在 CB 与 $\odot Q$ 交点为 C 时

$$CB = QB - R$$

$$\because D \text{ 为 } OB \text{ 中点, } OA = OB = 2$$

$$\therefore 2OD = OA$$

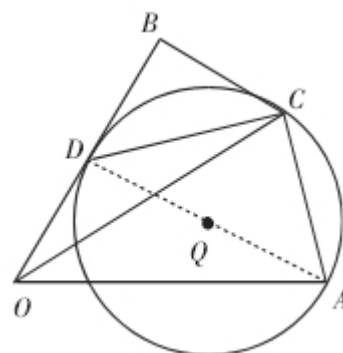
$$\because \angle AOB = 60^\circ$$

$$\therefore DA = \sqrt{3} \text{ 且 } AD \perp BO$$

$$\because DB = 1$$

$$\therefore QB = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore CB = QB - R = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$$



【*】问题⑤：边长为1的正方形OBDA，OC=1，∠ACB为钝角，求CD的最小值。

∵正方形OBDA边长为1，∴OC=1

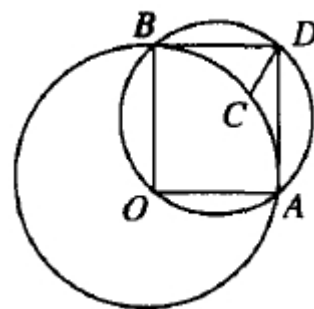
故A、B、C在以O为原点，半径为1的圆上

∵∠ACB为钝角

∴C在劣弧AB上

如图所示，易知CD的最小值在CD与⊙O交点为C时

$$CD = OD - R = \sqrt{2} - 1$$



【*】问题⑥：OA=OB=2，OC=1，AC⊥BC，求AB的取值范围。

∵OA=OB=2

∴故A、B在以O为原点，半径为2的圆上

∴OC=1

故C在以O为原点，半径为1的圆上

∵AC⊥BC

∴C在以AB为直径的圆M上

如图所示，易知AB的最小值在⊙M与⊙O相外切时

令AB=2R，在直角△OAM中 OA=2 OM=1+R AM=R

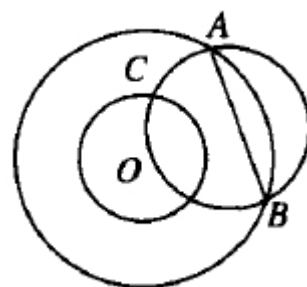
$$\therefore 2^2 = (R+1)^2 + R^2, R = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

如图所示，易知AB的最大值在⊙M与⊙O相内切时

在直角△OAM中 OA=2 OM=R-1 AM=R

$$\therefore 2^2 = (R-1)^2 + R^2, R = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$$

$$\therefore AB \in [\sqrt{7}-1, \sqrt{7}+1]$$



【*】问题⑦： O 、 B 、 A 三点不共线， $OA=OB=3$ ，若 C 、 B 、 A 三点共线， $OC=\sqrt{3}$ ，

求 AB 的最小值。

$$\because OA=OB=3$$

$\therefore$ 故 A 、 B 在以 O 为原点，半径为 3 的圆上

$$\because OC=\sqrt{3}$$

故 C 在以 O 为原点，半径为 $\sqrt{3}$ 的圆上

$\because C$ 、 B 、 A 三点共线

$\therefore$ 动弦 AB 须与小 $\odot O$ 有公共点，

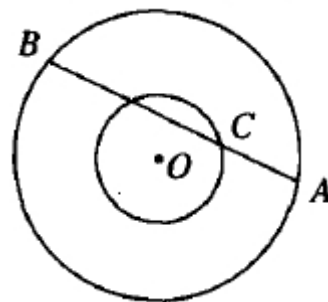
如图所示，有直线与圆的位置关系可知

当 AB 和小 $\odot O$ 相切时，切点为 C

在直角 $\triangle OAC$ 中 $OA=3$ $OC=\sqrt{3}$

$$\therefore 3^2 = \sqrt{3}^2 + AC^2, AC = \sqrt{6}$$

$\therefore AB$ 的最小值为 $2\sqrt{6}$



【*】问题⑧： $OA=1$ ， $OB<1$ ，且以 OA 、 OB 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{1}{2}$ ，求

OA 、 OB 的夹角范围。

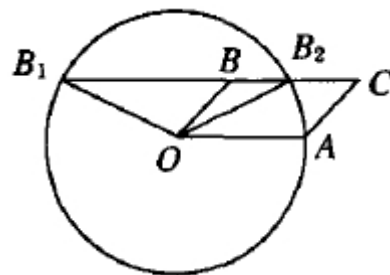
以 OA 、 OB 以为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{1}{2}$

$\therefore$ 点 B 在与直线 OA 平行且与它距离为 $\frac{1}{2}$ 的直线上。

$$\because OB < 1$$

$\therefore$ 当 B 在 B_1 时， θ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

当 B 在 B_2 时， θ 的最大值为 $\frac{5\pi}{6}$



思考：那些条件可以建构圆？

$$\because OA = OB = 2$$

$\therefore$ 故 A 、 B 在以 O 为原点，半径为 2 的圆上

$$\because OC = 1$$

故 C 在以 O 为原点，半径为 1 的圆上

$$\because AC \perp BC$$

$\therefore C$ 在以 AB 为直径的圆 M 上

$$\because \angle AOB = 120^\circ, \angle ACB = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOB + \angle ACB = 180^\circ$$

故 O 、 A 、 B 、 C 四点共圆

编者注：带【*】的内容，初学有难度，为选学培优要求，视频 2 里有讲解。本课时请重点学习常规内容（视频 1）。