从勾股定理谈起---拓展提升 A 组题

1．在△ABC 中，若$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则角 B 的值为__________.

A.$\frac{\pi}{6}$　　　B.$\frac{\pi}{3}$　　　C.$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　　D.$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

答案　D

解析　∵$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，

∴$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\tan B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $\cos B\tan B=\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∵$0<B<\pi$，∴角 B 的值为$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

2．已知a,b,c分别为$\triangle ABC$内角A,B,C的对边，$c^2=2ab$且$\sin A=\frac{1}{2}\sin C$，则$\cos A=$__________.

【答案】$\frac{7}{8}$

【解析】

【分析】

由$\sin A=\frac{1}{2}\sin C$结合$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$可得$c=2a$，再利用$c^2=2ab$得到三边的关系，最后利用$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$可求.

【详解】

由$\sin A=\frac{a}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$，故$\frac{a}{2R}=\frac{1}{2}\times\frac{c}{2R}$（$R$为外接圆的半径），故$c=2a$，

又$c^2=2ab$，故$b=2a$，

由$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7a^2}{8a^2}=\frac{7}{8}$.

故答案为：$\frac{7}{8}$.

3．在ΔABC中，a,b,c分别为内角A,B,C的对边，若$2\sin B=\sin A+\sin C,\cos B=\frac{3}{5}$，且$S_{\Delta ABC}=6$，则$b=$__________.

【答案】4

【解析】

已知等式$2\sin B=\sin A+sinC$，利用$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$化简得：

$2b=a+c$，$\because \cos B=\dfrac{3}{5},\therefore$可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ac\times\dfrac{4}{5}=6$，可解得$ac=15$，$\therefore\ \ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=\left(a+c\right)^2-2ac\left(1+\cos B\right)=4b^2-2\times15\times\left(1+\dfrac{3}{5}\right)$，$\therefore$可解得$b=4$，故答案为$4$.

4.在△ABC中，已知$a-b=4$，$a+c=2b$，且最大角为120°，求三边长.

解 由$\begin{cases}a-b=4,\\a+c=2b,\end{cases}$ 得$\begin{cases}a=b+4,\\c=b-4.\end{cases}$

$\therefore a>b>c$，$\therefore A=120°$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120°$，

即$(b+4)^2=b^2+(b-4)^2-2b(b-4)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，

即$b^2-10b=0$，解得$b=0$(舍去)或$b=10$.

当$b=10$时，$a=14$，$c=6$.

5.在△ABC中，$a\cos A+b\cos B=c\cos C$，试判断三角形的形状.

解 方法一：由$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

代入已知条件得

$a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\cdot\dfrac{c^2-a^2-b^2}{2ab}=0$，

通分得

$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=0$，

展开整理得$(a^2-b^2)^2=c^4$.

$\therefore a^2-b^2=\pm c^2$，

即$a^2=b^2+c^2$或$b^2=a^2+c^2$.

根据勾股定理知△ABC是直角三角形.

方法二：由$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$，$\sin A\cos A+\sin B\cos B=\sin C\cos C$，

所以$\sin 2A+\sin 2B=\sin 2C$，因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin 2A+\sin 2B=-\sin(2A+2B)$，所以$\sin 2A(1+\cos 2B)+\sin 2B(1+\cos 2A)=0$，

所以$\sin A\cos A\cos^2 B+\sin B\cos B\cos^2 A=0$，所以$\cos A\cos B\sin(A+B)=0$，

所以$\cos A\cos B\sin C=0$，因为在$\triangle ABC$中，所以$A=\dfrac{\pi}{2}$或$B=\dfrac{\pi}{2}$，

所以，$\triangle ABC$是直角三角形.

6. 在$\triangle ABC$中, 已知$\sqrt{3}a\cdot\sin C=c\cdot\sin 2A$.

（Ⅰ）求$\angle A$的大小;

（Ⅱ）若$a=\sqrt{7}$，$b=2\sqrt{3}$, 求$\triangle ABC$的面积.

【答案】（Ⅰ）因为$\sqrt{3}a\cdot\sin C=c\cdot\sin 2A$，

所以$\sqrt{3}\dfrac{a}{c}\cdot\sin C=2\sin A\cos A$，

在$\triangle ABC$中, 由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$得$\sqrt{3}\dfrac{\sin A}{\sin C}\cdot\sin C=2\sin A\cos A$.

因为$0<A<\pi$，

所以$\sin A\neq 0$，

所以$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

故$A=\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅱ）在$\triangle ABC$中,由$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以得:$(\sqrt{7})^2=(2\sqrt{3})^2+c^2-2(2\sqrt{3})\cdot c\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

整理得$c^2-6c+5=0$，

解得$c=1$,或$c=5$,均符合题意.

当$c=1$时,$\triangle ABC$的面积为$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

当$c=5$时,$\triangle ABC$的面积为$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$