从勾股定理谈起---学习指南

一、学习目标：

1. 经历发现、猜想、推导三角形中已知两边及夹角求第三边及已知三边求角的过程,享受数学发现的快乐,激发学习兴趣.
2. 通过与三角、平面几何等知识的联系，能多个角度探究已知两边及夹角求第三边，比较不同探究方法的区别与联系,体验此结论的不同结构、表现形式和含义.
3. 感悟“类比”、“函数与方程”、“特殊到一般”、“化归与转化”、“数形结合”等思想方法.
4. 能用探究出的结论及其变式解决一些简单的解三角形问题.

二、学法指导：

初中我们学过三角形全等的判断定理，其中有 SAS 和 SSS 。那么如果给了两边及其夹角如何求第三边呢？这节课我们就从大家熟悉的勾股定理开始研究，通过特殊到一般的方法，把斜三角形的问题转化为直角三角形来研究。解决求边长即求线段长度问题除了勾股定理外，还有解析法即用两点间距离公式求线段长度。这节课我们就要解决已知两边及其夹角求第三边；已知两边及其中一边对角求第三边；已知三边求三个内角的问题。给定足够条件解决确实三角形问题,条件开放即条件不足时解决不定三角形问题。由于三角形为几何图形,所以我们要体会探究公式和应用公式解决问题时,数形结合思想和方程思想在解三角形问题当中的应用。

三、学习过程：

一个三角形含有各种各样的几何量.例如三边边长、三个内角的度数、面积等，它们之间存在着确定的关系.例如，在初中，我们得到过勾股定理、锐角三角函数，这是直角三角形中的边、角定量关系.对于一般三角形，我们已经定性地研究过三角形的边、角关系，得到了 SSS , SAS , ASA, AAS 等判定三角形全等的方法.这些判定方法表明，给定三角形的三个角、三条边这六个元素中的某些元素，这个三角形就是唯一确定的.那么三角形的其他元素与给定的某些元素有怎样的数量关系？

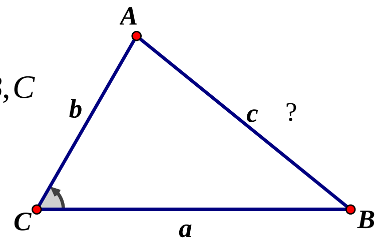
1、 复习回顾，引入问题

我们知道，两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等.这说明，给定两边及其夹角的三角形是唯一确定的.也就是说，三角形的其他边、角都可以用这两边及其夹角来表示.那么，表示的公式是什么？

2、特殊出发，探究一般

问题 1：已知三角形两边和它们的夹角能否计算出另一边?

思考：当$C=90^\circ$时，$a^2+b^2=c^2$，那么，对任意的三角形内角C，a^2、b^2、c^2是否也满足某种关系？



【探究】（建立数学模型）如图 1，在ΔABC中，三个角A,B,C所对的边分别是a，b，c，怎样用a，b和C表示c？

3、理性思考，演绎证明

思考：求三角形的边长即求线段的长度都有什么方法？

预设：勾股定理，两点间距离公式等.

思考：如何在斜三角形中构造直角三角形？

方法一：（平面几何法）边$\rightarrow Rt\Delta$

如图 2，过A做$AH\perp BC$于H，则$AH=b\sin C, CH=b\cos C$

所以$BH=a-b\cos C$

在$Rt\ \Delta AHB$中,$AB^2=AH^2+BH^2$

即$c^2=(b\sin C)^2+(a-b\cos C)^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

（$\angle C$为钝角略证）

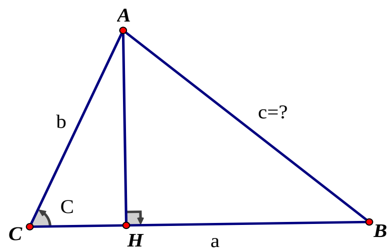


图 2

思考：求边长即线段的长度除了构造直角三角形之外，还可以用什么方法？

预设：两点间距离公式.

思考：怎样用两点间距离公式求第三边长呢？

预设：建系得出点的坐标

思考：怎样建立直角坐标系呢？

方法二：（坐标法）边$\rightarrow$距离$\rightarrow$坐标

建立如图 3 所示的平面直角坐标系，

$C(0,0), A(b\cos C, b\sin C), B(a,0)$

利用两点间距离公式得

$$|\mathrm{AB}|^2=(b\cos C-a)^2+(b\sin C-0)^2$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

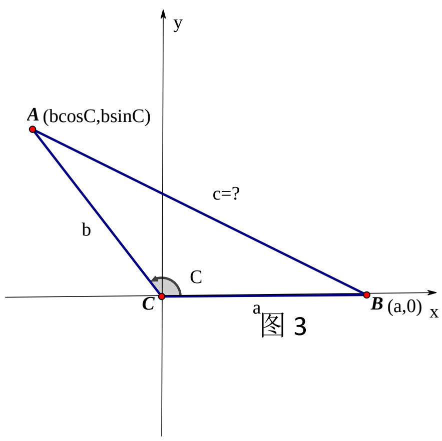


图 3

同理，我们还能够得出$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

思维点拨：进行探究时要展开联想，力求寻找合理的知识方法，进行自主性的活动与尝试，进一步拓展自己的知识链. 比如解三角形处理的是三角形的边长、角度等度量问题，我们如何求线段长度？如何度量？能够联想到勾股定理构造直角三角形。长度属于代数范畴，而三角形的边、角是几何概念，因此自然会联想到解析法，即把几何中的基本元素——点，赋予代数含义——坐标，从而使数和几何元素实现了互相转化. 实现三角形边角的数形联系，体会数形结合思想在三角形中的应用.

4、结论剖析，深化理解

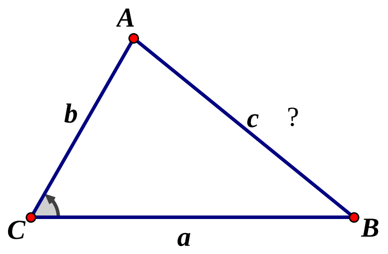
问题 2：在三角形中，如何用符号语言与文字语言表示上述结论？

符号语言：在ΔABC中，$AB=c,BC=a,AC=b,$则：

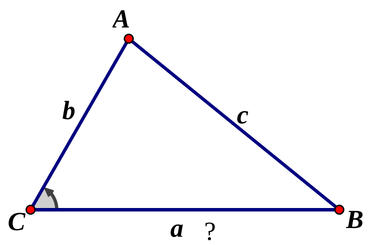
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A；\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B；\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

语言表述：三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.

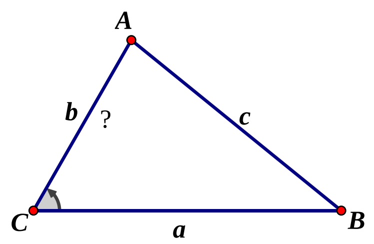
分析：每个公式四个量知三求一，我们来看，会产生几类问题？



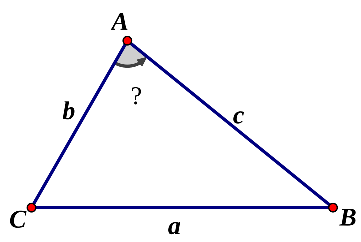
SAS



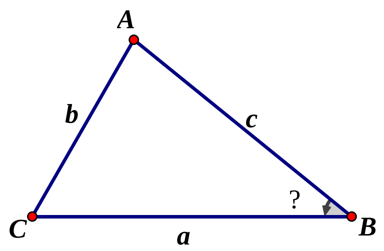
SSA



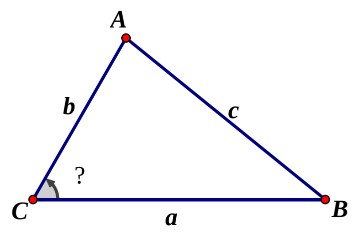
SSA



SSS



SSS



SSS

会产生三类问题：SAS，SSS ，SSA， 下面我们分别来看一看这三类问题.

例 1 如图 4，B、C两地之间隔着一座小山，现要测量B、C之间即将修建的一条隧道的长度. 另选一个点A，可以测得的数据有：$AB=3\text{ km}$，$AC=2\text{ km}$，$\angle A=60^\circ$，如何求

B， C 两地之间隧道的长度.

（建立数学模型）在 ΔABC 中， $AB=c, BC=a, AC=b,$ 若 $b=2, c=3, A=60°$, 求 a .

解析:由探究的结论,得

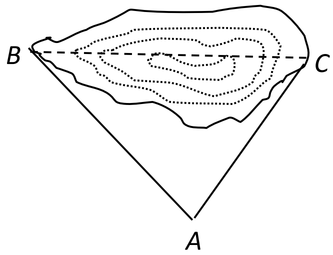


图 4

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+3^2-2\times 3\times 2\times\cos 60°=7$,

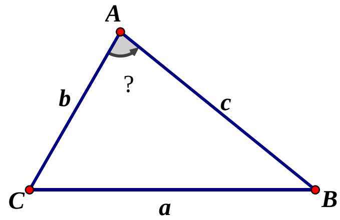
所以 $a=\sqrt{7}$

反思感悟：直接应用结论解决已知 SAS 求第三边的问题.

问题 3：如果只知道三边长，是否能求出三角形的内角？

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$； $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$； $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

引申公式变形： $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$； $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$； $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.



定性 $\rightarrow$ 定量（判断三角形形状）当∠C=90° 时， $a^2+b^2=c^2$；

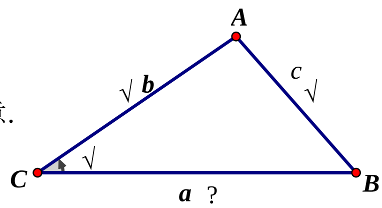
$0°<\angle C<90°$时， $a^2+b^2>c^2$；当 $90°<\angle C<180°$时， $a^2+b^2<c^2$；

例 2 在 ΔABC 中， $a=3, b=4, c=\sqrt{37}$，求 ΔABC 的最大内角.

解析：$\because c>a$， $c>b$， $\therefore$ 角 C 最大. 由 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{9+16-37}{2\times 3\times 4}=-\dfrac{1}{2}$,

$\because C\in(0,\pi)$， $\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$.

例 3： 已知△ABC 中， $C=30^\circ$， $c=2$， $b=2\sqrt{3}$，求 a .



方法一：由 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得， $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，

因为在△ABC 中，所以 $B=60^\circ$ 或 120°，均符合题意.

若 $B=60^\circ$ 时， $A=90^\circ$， $a=4$；

若 $B=120^\circ$ 时， $A=30^\circ$， $a=2$.

方法二：由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ，

整理得 $a^2-6a+8=0$，解得 $a=2$ 或 $a=4$，经检验均符合题意.

（若 $a=2$ 时， $A=30^\circ$， $C=120^\circ$；若 $a=4$ 时， $A=90^\circ$， $C=60^\circ$ ）

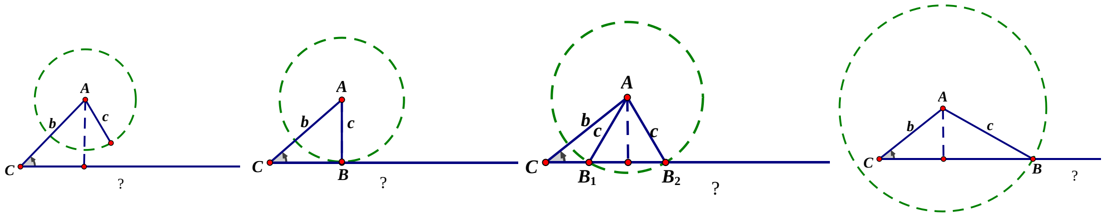
变式一： 已知 $b=2, c=3, C=60°$ ，求 a .

解析：由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得$a^2-2a-5=0$，所以$a=1+\sqrt{6}$.

变式二：已知$b=5,c=3,\mathrm{C}=60°$，求a.

解析：由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得$a^2-5a+16=0$，由于$\Delta<0$，所以方程无解,所以三角形无解.

【*】边角判别法：在△ABC中，已知b,c及C，且C为锐角，问满足什么条件时，△ABC无解？有一个解？有两个解？



注： $c<b\sin C$时无解；$c=b\sin C$或$c\geq b$时有一解；$b\sin C<c<b$时有两解.

【*】变式三：已知$c=3,\mathrm{C}=60°$，当b为何值时，△ABC无解？有一个解？有两个解？

方法一:边角判别法

当$b>2\sqrt{3}$时，三角形无解；

当$b=2\sqrt{3}$或$0<b\leq 3$时，三角形有一个解；

当$3<b<2\sqrt{3}$时，三角形有两个解.

方法二：判别式法

由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得$9=a^2+b^2-ab$，即$a^2-ba+\left(b^2-9\right)=0$，

当$\Delta<0$即，$b>2\sqrt{3}$时无解；

当$\Delta=0$或$a_1\cdot a_2\leq 0$，即$b=2\sqrt{3}$或$0<b\leq 3$时有一解；

当$\begin{cases}\Delta>0\\ a_1+a_2>0\\ a_1\cdot a_2>0\end{cases}$，即$3<b<2\sqrt{3}$时有两解.

【*】引申：此方法能否推广到一般情况，即已知c，C，当b为何值时，△ABC无解？有一个解？有两个解？感兴趣的同学可以继续探究,得出结果后与上边的边角判别法的结果进行对照.

（ 由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即$a^2-(2b\cos C)a+b^2-c^2=0$ ）

注：边边角问题，三角形解的个数的判断：边角判别法和判别式法.

【*】变式四：在ΔABC中，$a=2,b=\sqrt{2},c=x$，若△ABC 是钝角三角形，则正数 x 的取值范围是什么？

解析：由三角形边的关系，得$2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$.

因最大边只可能是x或2，若最大边为x，△ABC 是钝角三角形则满足$x^2>2^2+\sqrt{2}^2$，即$x>\sqrt{6}$；若 2 为最大边，△ABC 是钝角三角形则满足$2^2>x^2+\sqrt{2}^2$，即$0<x<\sqrt{2}$.

所以$\begin{cases}2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}\\0<x<\sqrt{2}\text{ 或 }x>\sqrt{6}\end{cases}$，

$\therefore x\in(2-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{6},2+\sqrt{2})$.

【*】例 4 在△ABC中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$B=2A$.

（1） 求$\cos A$的值；

（2） 求c的值.

【解析】（1）$\because a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$B=2A$，

$\therefore$在△ABC中，由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$得$\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}$，

$\therefore\dfrac{2\sin A\cos A}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，即$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（2） 方法一：由$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$得$9=24+c^2-4\sqrt{6}c\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

即$c^2-8c+15=0$，得$c=3$或$c=5$.

若$c=3$，则$a=c$，得$A=C$，又$B=2A$，$A+B+C=180^\circ$，

解得$A=C=45^\circ$，$B=90^\circ$，则$b=\sqrt{2}a$，这与$a=3$，$b=2$矛盾.

$\therefore c=3$不符合，舍去，

$\therefore c=5$.

方法二：由（1）知，$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，又$B=2A$，$\cos B=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{3}$，

由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$得$24=9+c^2-6c\times\dfrac{1}{3}$，$c^2-2c-15=0$

$\therefore c=5$.

方法三：由（1）知，$\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又$B=2A$，$\cos B=2\cos^2 A-1=\frac{1}{3}$，

因在△*ABC*中，$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

∴在△ABC中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，

$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=5$.

思维点拨：对比方法一和方法二我们来分析，当用小角的余弦公式$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$时，整理成关于c边的一元二次方程$c^2-(2b\cos A)c+(b^2-a^2)=0$时，由于$A<B$，所以$a<b$，因$\Delta>0$，$c_1\cdot c_2>0$，$c_1+c_2=2b\cos A>0$，关于$c$边的一元二次方程有一两正根，故$c$有两解；当用大角的余弦公式$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$时，整理成关于$c$边的一元二次方程$c^2-(2a\cos B)c+(a^2-b^2)=0$时，由于$A<B$，所以$a<b$，故$c_1\cdot c_2<0$，关于$c$边的一元二次方程必有一正一负根，故$c$有唯一解.

例5　在△*ABC*中，若$a\cos A=b\cos B$，试判断该三角形的形状.

解法一：　由$a\cos A=b\cos B$并结合结论的变式，

得$2R\sin A\cos A=2R\sin B\cos B$，

即$\sin 2A=\sin 2B$，因$A,B\in(0,\pi)$，

$\therefore 2A=2B$或$2A+2B=\pi$，

∴ $A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，

∴△*ABC*为等腰三角形或直角三角形.

解法二：由$a\cos A=b\cos B$并结合结论的变式，

得$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

即$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$，

$\therefore a^4-b^4+b^2c^2-a^2c^2=0$，

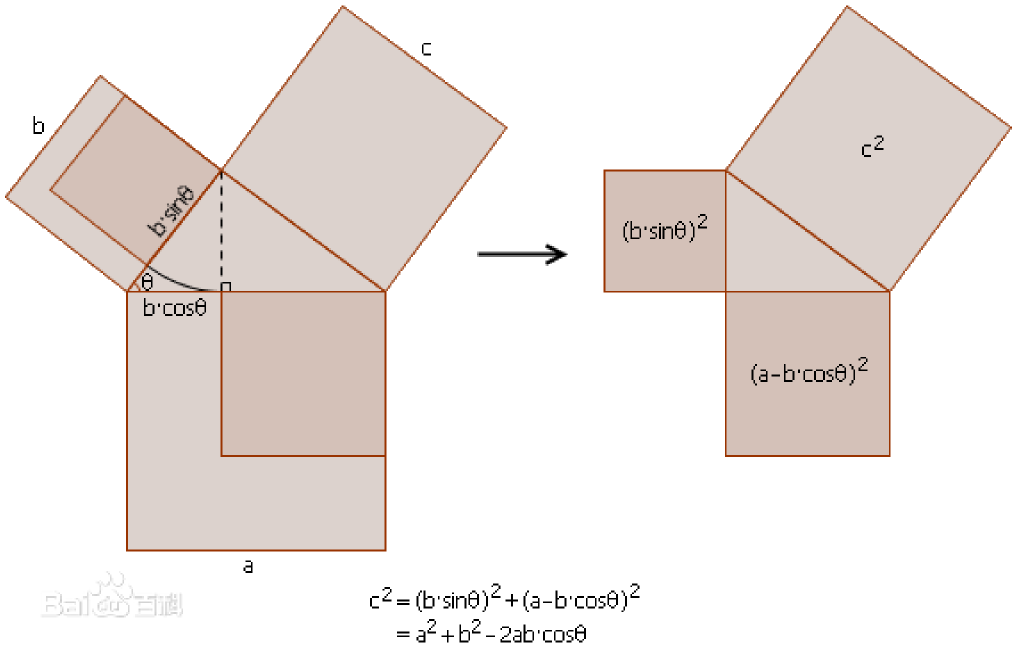
$\therefore (a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$，

$\therefore (a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$，

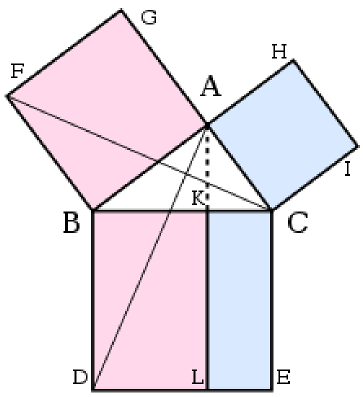
$\therefore a^2 = b^2$ 或 $a^2 + b^2 = c^2$

∴△ABC 为等腰三角形或直角三角形.

【*】**拓展**：关于已知两边及夹角求第三边关系式的证明有很多种方法，如下面《钦定四库全书》上的证明，和《几何原本》上勾股定理的证明类似，有兴趣的同学可以课下继续探究。



在欧几里得的《几何原本》一书中给出勾股定理的以下证明：



5、归纳整理，内化知识

问题 5：从知识、思想、方法等不同角度回顾一下这节课有何收获？

(1) 知识要点

①已知 SAS 求第三边；

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$；

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$；

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

②已知 SSS 求三个内角；

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$；

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$；

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

(2)　思想方法

“类比”、“函数与方程”、“特殊到一般”、“化归与转化”、“数形结合”.

6 、探究课后任务（见分层任务）

拓展：2.

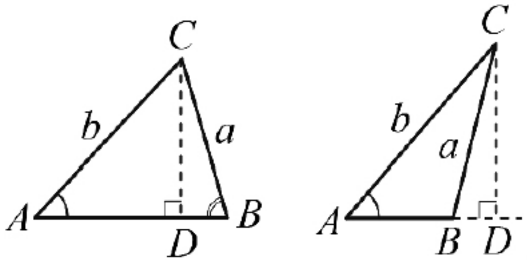
预备　在ΔABC中，若角A，B，C所对的边分别是a，b，c，

求证：$c = a\cos B + b\cos A$

思路分析　方法一（化斜为直）

在ΔABC中，过点C作$CD \perp AB$于点D，

$AB = AD + DB = b\cos A + a\cos B$或$AB = AD - DB = b\cos A + a\cos B$



$\therefore c = a\cos B + b\cos A$，同理$a = b\cos C + c\cos B$，$b = a\cos C + c\cos A$

思路分析　方法二（化边为角）：要证$c = a\cos B + b\cos A$

只需证$\sin C = \sin A\cos B + \sin B\cos A$

证明　$\because A + B + C = \pi$

$\therefore \sin C = \sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\therefore c=a\cos B+b\cos A$

思路分析　方法三（化角为边）：

证明　右边$=a\cos B+b\cos A=a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2c^2}{2c}=c=$左边

$\therefore c=a\cos B+b\cos A$

请思考：如何将$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B\\b=a\cos C+c\cos A\\c=a\cos B+b\cos A\end{cases}$与$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$互相推出.

解析：若$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B\\b=a\cos C+c\cos A\\c=a\cos B+b\cos A\end{cases}$，则$\begin{cases}a^2=ab\cos C+ac\cos B\\b^2=ab\cos C+bc\cos A\\c^2=ac\cos B+bc\cos A\end{cases}$，

所以$\begin{cases}a^2-b^2=ac\cos B-bc\cos A\\c^2=ac\cos B+bc\cos A\end{cases}$，

所以$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

同理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

若$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$，每两个式子相加，则得$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B\\b=a\cos C+c\cos A\\c=a\cos B+b\cos A\end{cases}$.