

三角函数为背景的劣构题专题

【学习目标】

1. 熟练应用三角函数和解三角形相关的知识，判断三角函数性质和边角关系；
2. 在条件开放或结论开放的劣构题中，掌握代入法、分析法、转化法等方法；
3. 在推理复杂时，能利用必要性思想、模型思想、数形结合思想等简化过程；
4. 会根据题目的不同情境，采取不同的方法，并能快速找到最简洁的方法，利用来处理三角函数中的劣构问题.

【预备知识】

1. 三角函数诱导公式，两角和与差展开式、倍角公式、降幂公式、辅助角公式等，以及三角函数的奇偶性、单调性等性质；
2. 三角函数的表达式与图形变换（平移、伸缩）的对应关系；
3. 解三角形的正弦定理、余弦定理，及边角大小对应关系等.

【典型例题】

例题 1. 已知三角函数 $y = 2\sin(2x + \varphi) + B$ ，同时满足下面条件中的 2 个

$$\textcircled{1} \varphi = \frac{\pi}{2}; \textcircled{2} \varphi = \pi; \textcircled{3} \varphi = \frac{3\pi}{2}; \textcircled{4} \varphi = 2\pi; \textcircled{5} B = 1; \textcircled{6} B = 0;$$

- (1) 若该函数是奇函数，则应该满足以上哪 2 个条件？（若有多种答案，只需写出一种）
- (2) 求（1）中所确定函数的单调区间及最值.

1. 结论如何转化

针对（1），寻找两个条件，使函数为奇函数，主要的转化方法有

转化方法 1：将可能的条件逐一代入，利用诱导公式进行代数变形，再利用几何法或代数法检验是否满足奇函数的要求；

转化方法 2：（充分必要条件法）先利用奇函数的性质，排除不可能的结果，然后再逐一检验剩余结果是否满足要求；

转化方法 3：利用已有奇函数模型为目标，结合数形思想，进行条件筛选.

2. 多种解法

(1) 方法一：逐一检验①⑤；①⑥；②⑤；②⑥；③⑤；③⑥；④⑤；④⑥；

若条件是①⑤，此时 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}) + 1 = 2\cos 2x + 1$ ，此时 $f(-x) = f(x)$ ，是偶函数，不是奇函数；

若条件是①⑥，此时 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos 2x$ ，此时 $f(-x) = f(x)$ ，是偶函数，不是奇函数；

若条件是②⑤，此时 $y = 2\sin(2x + \pi) + 1 = -2\sin 2x + 1$ ，不是奇函数；

若条件是②⑥, 此时 $y = 2\sin(2x + \pi) = -2\sin 2x$, 是奇函数;

若条件是③⑤, 此时 $y = 2\sin(2x + \frac{3\pi}{2}) + 1 = -2\cos 2x + 1$, 是偶函数, 不是奇函数;

若条件是③⑥, 此时 $y = 2\sin(2x + \frac{3\pi}{2}) = -2\cos 2x$, 是偶函数, 不是奇函数;

若条件是④⑤, 此时 $y = 2\sin(2x + 2\pi) + 1 = 2\sin 2x + 1$, 不是奇函数;

若条件是④⑥, 此时 $y = 2\sin(2x + 2\pi) = 2\sin 2x$, 是奇函数;

因此, ② $\varphi = \pi$; ⑥ $B = 0$; 或者④ $\varphi = 2\pi$; ⑥ $B = 0$ 是满足要求的.

方法二: 因为奇函数满足: 当 $x = 0$ 时, $y = 0$; 因此 $2\sin \varphi + B = 0$; 此时

(1) 若 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 则 $B = -2$; (2) 若 $\varphi = \pi$, 则 $B = 0$;

(3) 若 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, 则 $B = 2$; (4) 若 $\varphi = 2\pi$, 则 $B = 0$;

因此可能的结果是: (1) ② $\varphi = \pi$; ⑥ $B = 0$; 或者④ $\varphi = 2\pi$; ⑥ $B = 0$;

下面验证其是否正确:

当满足② $\varphi = \pi$; ⑥ $B = 0$; 此时 $y = 2\sin(2x + \pi) = -2\sin 2x$, 满足奇函数的要求;

当满足④ $\varphi = 2\pi$; ⑥ $B = 0$; 此时 $y = 2\sin(2x + 2\pi) = 2\sin 2x$, 满足奇函数的要求.

方法三: 根据三角函数的知识: 判断函数为奇函数, 首先从三角函数图象上来分析, 三角函数图象不能上下移动, 因此 $B = 0$;

其次函数类型应该是正弦函数, 因此结合诱导公式, 得到的② $\varphi = \pi$; ④ $\varphi = 2\pi$ 是正确的.

(2) 若 (1) 答案是② $\varphi = \pi$; ⑥ $B = 0$; 此时 $y = 2\sin(2x + \pi) = -2\sin 2x$, 函数的增区间满足

$$2x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z}), \text{ 故 } x \in [\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z});$$

同理, 函数的减区间满足 $2x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$, 故 $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$;

因此, 函数的增区间为 $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$, 减区间为 $[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$;

同时, 函数的最大值为 2, 此时 $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; 最小值为 2, 此时 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$;

若 (1) 答案是④ $\varphi = 2\pi$; ⑥ $B = 0$; 此时 $y = 2\sin(2x + 2\pi) = 2\sin 2x$.

函数的增区间满足 $2x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$, 故 $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$;

同理, 函数的减区间满足 $2x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$, 故 $x \in [\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$;

因此, 函数的增区间为 $[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$, 减区间为 $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$;

同时, 函数的最大值为 2, 此时 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; 最小值为 2, 此时 $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$;

3. 每种方法的难点及突破方法.

方法一: 当把所有可能的条件逐一代入, 多次重复过程, 工作量较大, 需要熟练掌握诱导公式及奇函数的判定方法; (这种方法效率较低, 易入手但不应首选)

方法二: 先利用必要条件筛选可能的答案, 减少了计算量; 但是必须检验其充分性; (容易忽略其充分性的检验)

方法三: 对思维分析要求较高, 需要熟悉三角函数模型, 尤其是奇偶性、图形变换;

例题 2

已知 $a=3, b=4$ 的 $\triangle ABC$ 中, 还可能满足下列某些条件:

$$\textcircled{1} c=8 \quad \textcircled{2} B < A \quad \textcircled{3} A = \frac{\pi}{6} \quad \textcircled{4} \sin B > \sin A.$$

(I) 直接写出可能满足的所有序号;

(II) 在 (I) 的条件下, 求 $\sin B$ 及边 c 的值.

1. 条件如何转化

在三角形中, 已知两个边的值, 推导其它边、角关系的结论时, 常使用的工具主要就是正弦定理、余弦定理, 以及延申的边角的大小对应关系; 同时还有三边的不等关系等.

对于 (I) 转化方法 1: 由 $a=3, b=4$ 知 $b > a$; 又三角形中, 大边对大角, 所以 $B > A$ 且 $\sin B > \sin A$;

转化方法 2: 由 $a=3, b=4$ 知 $c \in (1, 7)$;

对于 (II) 求 $\sin B$ 一定要用正弦定理, 边 c 的求法有两条途径, 一个是正弦定理; 一个终 7 是余弦定理.

2. 多种解法

解: (I) ③④

$$(II) \text{ 解法 1: 由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 即 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{2}{3}$$

因为 $b > a$, 所以 $B > A$

$$\text{所以 } \cos B = \pm \sqrt{1 - \sin^2 B} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{当 } \cos B = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 时, } \sin C = \sin(A+B) = \sin(B+\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B + \frac{1}{2} \cos B = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{6}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ 即 } c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 6 \sin C = 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$$\text{当 } \cos B = -\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 时, } \sin C = \sin(A+B) = \sin(B+\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B + \frac{1}{2} \cos B = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{6}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ 即 } c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 6 \sin C = 2\sqrt{3} - \sqrt{5}$$

$$(II) \text{ 解法 2: 由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 即 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{2}{3}$$

因为 $b > a$, 所以 $B > A$

$$\text{所以 } \cos B = \pm \sqrt{1 - \sin^2 B} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{由余弦定理得 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \text{ 即 } 16 = 9 + c^2 - 2 \times 3 \times c (\pm \frac{\sqrt{5}}{3})$$

$$\text{即 } c^2 \pm 2\sqrt{5}c - 7 = 0$$

$$\text{所以 } c = \pm 2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}, \text{ 又 } c > 0$$

$$\text{所以 } c = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}, \text{ 经检验符合题意.}$$

3. 每种方法的运算难点及突破方法.

方法一中的运算: 已知正弦求余弦, 要注意角的范围, 此外三角形中角的转换 $\sin C = \sin(A+B)$;

方法二中的运算: 利用余弦定理尽量选择较大边的平方用较小边的平方来表示.

【小结提升】

分析法、转化法、代入法等方法，必要性思想、模型思想、数形结合等思想，处理劣构题问题；

【本专题学法指导】

面对劣构题，如果是条件开放，则方法多样：直接逐一代入检验；也可以先根据某个条件（必要性）进行筛选，然后再进一步检验（充分）；还可以根据已有的结论、模型等直接选出正确答案；

如果是结论开放，可以使用分析、转化等方法，结合三角函数诱导公式、性质、解三角形的正弦定理、余弦定理等所有三角工具，判断对错；

劣构题如果开放到条件或结论没有选择限制，那就从常见的知识点上进行选择，如补充或探究函数的一个性质：可以从单调性、对称性、周期性等常见性质中选择；如果补充或探究一个函数，可以从指数函数、对数函数、幂函数、三角函数等中进行选择。