

劣构问题数列专题

【使用说明】

劣构问题一般指问题构成部分存在未知或者目标界定含糊不清或缺少限定，有多种解决办法和多种评价标准，是高考新增题型。本节主要围绕数列中的劣构问题，同学们主要从两个方面去突破此类问题，一方面是如何解决劣构，是多种方法都行得通还是通过排除最终限定出一种方法；另一个方面当题目补充为良构之后数列的核心内容和核心方法的掌握。

【学法指导】

- ①劣构题虽然形式比较特殊，但是考察的内容还是基础知识和基本技能，本质没有改变。
- ②劣构题一般有多种情况，但是只按一种方法给分，所以要把一种情况写完整，不能每种方法都说，又每种都说不严谨。
- ③数列的重点考察内容仍然是等差和等比，这两种数列的性质要弄清楚。
- ④数列也是函数，数列的单调性和最值问题的研究是考察的重点。

【主要方法】

- 1、等差等比数列基本量法；
- 2、求解基本量过程中体会方程思想；
- 3、反证法思想的应用；
- 4、数列时特殊的函数，会从函数的角度研究数列。

【教学目标】

- 1、通过练习熟练掌握等差等比数列的通项公式和前 n 项和公式；
- 2、会解决数列的单调性和最值问题；
- 3、会将非等差等比数列的问题转化为等差等比数列的问题；
- 4、通过对劣构问题条件的分析体会分类讨论思想和反证法的思想；

【教学重点】

- 1、劣构问题中条件的分析与取舍
- 2、等差等比数列的通项公式和前 n 项和公式及单调性

【教学难点】

数列的单调性和最值

【题目训练】

例题 1：从① $a_1 = -2$ ；② $S_3 = 2a_1 + \frac{1}{2}$ ③ $a_3 = 2$ ，三个条件中任选两个补充在下面问

题中，

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列， S_n 为其前 n 项和，若数列满足和 _____，求数列的通项公式并判断数列是否具有单调性，若有，给出证明；若没有，说明理由。（多种解答，只按一种给分）

解法一：选择① $a_1 = -2$ ；② $S_3 = 2a_1 + \frac{1}{2}$ 作为条件。

$$\text{由} \begin{cases} a_1 = -2 \\ S_3 = 2a_1 + \frac{1}{2} \end{cases} \text{得} \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_1 + a_1q + a_1q^2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = -2 \\ q = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_1 = -2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{则 } a_n = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} \text{ 或 } a_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

当 $a_n = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 时，数列奇数项为负，偶数项为正，不是单调数列。

当 $a_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 时，数列递增，证明如下：

$$a_n - a_{n-1} = (-2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (-2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} > 0$$

所以等比数列 $\{a_n\}$ 递增。

解法二：选择② $S_3 = 2a_1 + \frac{1}{2}$ ③ $a_3 = 2$ 作为条件。

$$\text{由} \begin{cases} a_3 = 2 \\ S_3 = 2a_1 + \frac{1}{2} \end{cases} \text{得} \begin{cases} a_1q^2 = 2 \\ a_1 - a_1q = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_1 = \frac{9}{2} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{则 } a_n = \frac{1}{2} \times (-2)^{n-1} \text{ 或 } a_n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

当 $a_n = \frac{1}{2} \times (-2)^{n-1}$ 时，数列奇数项为正，偶数项为负，不是单调数列。

当 $a_n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 时，数列递减，证明如下：

$$a_n - a_{n-1} = \frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} < 0$$

所以等比数列 $\{a_n\}$ 递减。

例 2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足以下四个条件中的三个：

① $a_3 = 4$ ；② $a_5 = -16$ ；③ $S_4 = 5$ ；④ $S_2 = 1$ 请指出这三个条件，并求等比数列

$\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} 。

解：由①②得 $q^2 = -4$ ，所以条件①②不能同时满足，只能选其中一个，所以③④必

选。将③④联立并用“基本量”表示得
$$\begin{cases} S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 5 \\ S_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} q = 2 \\ a_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} q = -2 \\ a_1 = -1 \end{cases}$$

当 $\begin{cases} q = 2 \\ a_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$ 时，与条件①②都矛盾。所以舍去。

当 $\begin{cases} q = -2 \\ a_1 = -1 \end{cases}$ 时，条件①不成立，条件②成立，所以选择条件②③④。

此时 $a_n = -1 \times (-2)^{n-1}$ ，

$$S_{2n} = -1 + 2 - 4 + 8 - 16 + \dots + (-1) \times (-2)^{2n-1}$$

$$= \frac{-1 \times [1 - (-2)^{2n}]}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{4^n - 1}{3}$$

课后练习：

在① $b_1 + b_3 = a_2$ ，② $a_4 = b_4$ ，③ $S_5 = -25$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，

若问题中的 k 存在，求 k 的值；若 k 不存在，说明理由。

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列, _____, $b_1 = a_5, b_2 = 3, b_5 = -81$,

是否存在 k , 使得 $S_k > S_{k+1}$ 且 $S_{k+1} < S_{k+2}$?

解法一:

根据题意 $\because b_2 = 3, b_5 = -81, \{b_n\}$ 是等比数列,

$\therefore b_1 = -1, q = -3, \therefore b_n = -(-3)^{n-1} \therefore b_1 = a_5$ 得 $a_5 = -1$,

选① $b_1 + b_3 = a_2$ 时, $a_2 = -10, a_5 = -1, \therefore d = 3, a_1 = -13$

$$S_k = -13k + \frac{k(k-1)}{2} \times 3 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{29}{2}k,$$

$$\therefore S_{k+1} = \frac{3}{2}k^2 - \frac{29}{2}k + 3k - 13, S_{k+2} = \frac{3}{2}k^2 - \frac{29}{2}k + 6k - 23,$$

要使 $S_{k+1} < S_k$, 只要 $S_{k+1} < S_{k+2}$

$$\therefore \begin{cases} 3k - 13 < 0 \\ 3k - 13 < 6k - 23 \end{cases} \therefore \frac{10}{3} < k < \frac{13}{3}, \therefore \text{存在 } k = 4 \text{ 符合题意}$$

选② $a_4 = b_4$ 时, $a_5 = -1, a_4 = b_4 = 27$,

$\therefore a_1 = 111, d = -28 \therefore S_k = 125k - 14k^2$,

$\therefore S_{k+1} = 125k - 14k^2 - 28k + 111 \therefore S_{k+2} = 125k - 14k^2 - 56k - 222$,

要使 $S_{k+1} < S_k$, 且 $S_{k+1} < S_{k+2}$

$$\therefore \begin{cases} -28k + 111 < 0 \\ -28k + 111 < -56k + 222 \end{cases} \therefore k > \frac{111}{28}, \text{ 且 } k < \frac{111}{28}, \therefore \text{不存在 } k \text{ 符合题意}$$

选③ $\because S_5 = -25$ 时, $a_5 = -1, \therefore d = 2, a_1 = -9$,

同理求得 $\begin{cases} 2k - 9 < 0 \\ 2k > 7 \end{cases} \therefore \frac{7}{2} < k < \frac{9}{2} \therefore \text{存在 } k = 4 \text{ 符合题意}.$

法二:

选①在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = -1, a_2 = b_1 + b_2 = -10, \therefore d = -3$,

$\therefore a_n = 3n - 16$, 此时存在 $k = 4$, 使 $a_{k+1} = a_5 < 0, a_{k+2} = a_6 = 2 > 0$

即存在 $k = 4$ 符合题意。

选②同理可得 $a_n = -28n + 139$, 此时 $\{a_n\}$ 为递减数列,

$\therefore$ 不存在正整数 k 符合题意。

选③同理可得 $a_n = 2n - 11$, 此时存在 $k = 4$, 使 $a_{k+1} = a_5 < 0, a_{k+2} = a_6 = 1 > 0$

即存在 $k = 4$ 符合题意。