【扩展提升任务答案】

1. 在① $b_1+b_3=a_2$，② $a_4=b_4$，③ $S_5=-25$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的 k 存在，求 k 的值；若 k 不存在，说明理由.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，$\{b_n\}$ 是等比数列，__________，$b_1=a_5, b_2=3$，$b_5=-81$，是否存在 k，使得 $S_k>S_{k+1}$ 且 $S_{k+1}<S_{k+2}$？

解法一：

根据题意 $\because b_2=3, b_5=-81, \{b_n\}$ 是等比数列，

$\therefore b_1=-1, q=-3, \therefore b_n=-(-3)^{n-1}$ $\because$ $b_1=a_5$ 得 $a_5=-1$,

选① $b_1+b_3=a_2$ 时，$a_2=-10, a_5=-1, \therefore d=3, a_1=-13$

$S_k=-13k+\dfrac{k(k-1)}{2}\times 3=\dfrac{3}{2}k^2-\dfrac{29}{2}k$,

$\therefore S_{k+1}=\dfrac{3}{2}k^2-\dfrac{29}{2}k+3k-13, S_{k+2}=\dfrac{3}{2}k^2-\dfrac{29}{2}k+6k-23$,

要使 $S_{k+1}<S_k$, 只要 $S_{k+1}<S_{k+2}$

$\therefore \begin{cases} 3k-13<0 \\ 3k-13<6k-23 \end{cases} \therefore \dfrac{10}{3}<k<\dfrac{13}{3}$, $\therefore$ 存在 $k=4$ 符合题意

选② $a_4=b_4$ 时，$a_5=-1, a_4=b_4=27$,

$\therefore a_1=111, d=-28$ $\therefore S_k=125k-14k^2$,

$\therefore S_{k+1}=125k-14k^2-28k+111$ $\therefore S_{k+2}=125k-14k^2-56k-222$,

要使 $S_{k+1}<S_k$, 且 $S_{k+1}<S_{k+2}$

$\therefore \begin{cases} -28k+111<0 \\ -28k+111<-56k+222 \end{cases} \therefore k>\dfrac{111}{28}$, 且 $k<\dfrac{111}{28}$, $\therefore$ 不存在 k 符合题意

选③ $\because S_5=-25$ 时, $a_5=-1$, $\therefore d=2, a_1=-9$,

同理求得 $\begin{cases} 2k-9<0 \\ 2k>7 \end{cases}$ $\therefore \dfrac{7}{2}<k<\dfrac{9}{2}$ $\therefore$ 存在 $k=4$ 符合题意。

法二：

选①在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=-1, a_2=b_1+b_2=-10, \therefore d=-3,$

$\therefore a_n=3n-16,$此时存在$k=4,$使$a_{k+1}=a_5<0, a_{k+2}=a_6=2>0$

即存在$k=4$符合题意。

选②同理可得$a_n=-28n+139,$此时$\{a_n\}$为递减数列，

$\therefore$不存在正整数k符合题意。

选③同理可得$a_n=2n\text{-}11$，此时存在$k=4,$使$a_{k+1}=a_5<0, a_{k+2}=a_6=1>0$

即存在$k=4$符合题意。

2. 函数 $y=f(x), x\in[1,+\infty)$，数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(n), n\in\mathbf{N}^*$，

①函数$f(x)$是增函数；

②数列$\{a_n\}$是递增数列.

写出一个满足①的函数$f(x)$的解析式____.

写出一个满足②但不满足①的函数$f(x)$的解析式____.

答案：$f(x)=x^2$； $f(x)=(x-\frac{4}{3})^2$ 答案不唯一