

[课时作业参考答案]

已知 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是有正整数组成的无穷数列, 对任意 $n \in N^*$, a_n 满足如下两个条件: ① a_n 是 n 的倍数; ② $|a_n - a_{n+1}| \leq 5$

求证: 当 $n \geq 11$ 时, $a_n \leq 5n$.

证明: 由 $a_{n+1} \leq a_n + 5$ ($n=1, 2, \dots$), 对于任意的 n , 有 $a_n \leq 5(n-1) + a_1$.

当 $n \geq a_1 - 4$ 时, $a_n \leq 5(n-1) + a_1$, 即 $a_n \leq 5(n-1) + n + 4$, 即 $a_n \leq 6n - 1$.

则 $a_n < 6n$ 成立.

因为 a_n 是 n 的倍数, 所以当 $n \geq a_1 - 4$ 时, 有 $a_n \leq 5n$ 成立.

若存在 n 使 $a_n > 5n$, 依以上所证, 这样的 n 的个数是有限的, 设其中最大的为 N .

则 $a_N > 5N$, $a_{N+1} \leq 5(N+1)$ 成立, 因为 a_N 是 N 的倍数, 故 $a_N \geq 6N$.

由 $5 \geq a_N - a_{N+1} \geq 6N - 5(N+1) = N - 5$, 得 $N \leq 10$.

因此当 $n \geq 11$ 时, $a_n \leq 5n$.