无穷递降法在解决数列压轴题中的应用举例

【学法指导】

近年来北京高考理科数学第 20 题特点.

① **规避题型，突出新概念和陌生情境.** 北京高考数学压轴题目往往是一种离散型最优化问题，呈现形式上以集合或数列为主，本质上可能是组合极值或算法问题. 题目中几乎总是伴有新概念、新符号和陌生情境；

② **淡化技巧，有别于通常的竞赛题.** 淡化技巧，不强调复杂的计算，强调学生的和数学阅读能力、数学直观感觉和符号表达能力.数学竞赛欣赏选手们“出其不意”的解题技巧，压轴题则强调按部就班、逐个击破难点的解题策略；

③ **背景深刻，重视实际应用型问题.** 压轴题中有很多具有实际背景的问题: 2005 年第 20 题，背景是单因素优选法; 2010 年第 20 题，背景是纠错码理论中的普洛特金(Plotkin)上界; 2014 年背景是两工序流水线时间最优化问题；

高考第 20 题的试题结构 通常分为 3 小问，第①问鼓励学生动手举例子实践、探究；第②问需要在完成第①问的基础上（熟悉概念）进行逻辑推理；第③小问通常需要“先猜后证”，这种思考问题的方式在平时较少遇到，需要主动训练，我们这一讲就该类题型和相应的对策加以总结.

【学习目标】

1、同学们通过本节课的分析，争取能够明确什么是无穷递降法；

2、同学们通过本节课的分析，争取能够学会用无穷递降法处理一类有关数列背景的压轴题；

3、同学们通过作业中的练习，争取能够进一步领悟用无穷递降法处理一类有关数列背景的压轴题；

4、同学们通过这一个专题的努力探索，争取能够对数列背景的压轴题有所感悟.

【学习重点】

无穷递降法的基本原理.

【学习难点】

知识之间的关联和综合应用能力的提升.

典例分析

提 出 问 题 ： 什 么 是 无 穷 递 降 法 ？

无穷递降法是证明方程无解的一种方法.其步骤为：假设方程有解，并设 x 为最小的解.从 x 推出一个更小的解 y，从而与 x 的最小性相矛盾.所以，方程无解.

命题 1：若 $\{a_n\}$ 存在最小值，且 $a_{n+1}<a_n$，则 $\{a_n\}$ 不能为无穷数列.

证明：假设 $\{a_n\}$ 为无穷数列，设 a_i 为其最小值的项，由题 $a_{i+1}<a_i$，矛盾，所以 $\{a_n\}$ 必为有限数列.

命题 2：若无穷数列 $\{a_n\}$ 存在最小值，且 $a_{n+1}\le a_n$，则存在 N，当 $n\ge N$ 时，$a_n=t$.

证明：设 $a_n=t$ 为其最小值，由最小性，知 $a_{n+1}\ge t$，由单调性，知 $a_{n+1}\le t$，所以 $a_{n+1}=t$.

例 1 已知无穷数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}=|b_n|-|c_n|$，$b_{n+1}=|c_n|-|a_n|$，$c_{n+1}=|a_n|-|b_n|$. 记 $d_n=\max\{|a_n|,|b_n|,|c_n|\}$（$\max\{x,y,z\}$ 表示 3 个实数 x，y，z 中的最大值）.

（Ⅰ）若 $a_1=1$，$b_2=2$，$c_3=3$，求 b_1，c_1 的可能值；

（Ⅱ）若 $a_1=1$，$b_1=2$，求满足 $d_2=d_3$ 的 c_1 的所有值；

（III）设a_1，b_1，c_1是非零整数，且$|a_1|$，$|b_1|$，$|c_1|$互不相等，证明：存在正整数k，使得数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$中有且只有一个数列自第k项起各项均为0.

解析：（Ⅰ）由$b_2=|c_1|-|a_1|$，得$|c_1|-1=2$，所以$c_1=\pm3$；

由$c_3=|a_2|-|b_2|$，得$|a_2|-2=3$，所以$a_2=\pm5$，

又$a_2=|b_1|-|c_1|=|b_1|-3\geqslant-3$，故$a_2=5$，$|b_1|=8$，$b_1=\pm8$.

所以b_1，c_1的所有可能值为

$b_1=8$，$c_1=3$；

$b_1=8$，$c_1=-3$；

$b_1=-8$，$c_1=3$；

$b_1=-8$，$c_1=-3$.

（Ⅱ）若$a_1=1$，$b_1=2$，记$c_1=x,$

则$a_2=2-|x|,b_2=|x|-1,c_2=-1$，$d_2=\begin{cases}2-|x|,0\leqslant|x|<1,\\1, \quad 1\leqslant|x|<2,\\|x|-1,|x|\geqslant2,\end{cases}$

$a_3=||x|-1|-1$，$b_3=1-|2-|x||$，$c_3=|2-|x||-||x|-1|$，

当$0\leqslant|x|<1$时，$a_3=-|x|,b_3=|x|-1,c_3=1$，$d_3=1$，由$d_3=d_2$，得$|x|=1$，不符合；

当$1\leqslant|x|<2$时，$a_3=|x|-2,b_3=|x|-1,c_3=3-2|x|$，$d_3=\begin{cases}2-|x|,1\leqslant|x|<1.5,\\|x|-1,1.5\leqslant|x|<2,\end{cases}$

由$d_3=d_2$，得$|x|=1$，符合；

当$|x|\geqslant2$时，$a_3=|x|-2,b_3=3-|x|,c_3=-1$，$d_3=\begin{cases}1, \quad 2\leqslant|x|<3,\\|x|-2,|x|\geqslant3,\end{cases}$

由$d_3=d_2$，得$|x|=2$，符合；

综上，c_1的所有取值是$-2,-1,1,2$.

（III）先证明“存在正整数$k\geqslant3$，使a_k,b_k,c_k中至少有一个为0”.

假设对任意正整数$k\geqslant3$，a_k,b_k,c_k都不为0，

由a_1,b_1,c_1是非零整数，且$|a_1|,|b_1|,|c_1|$互不相等，得$d_1\in\mathbf{N}^*$，$d_2\in\mathbf{N}^*$.

若对任意$k\geqslant3$，a_k,b_k,c_k都不为0，则$d_k\in\mathbf{N}^*$，

即对任意$k\geqslant1$，$d_k\in\mathbf{N}^*$.

当$k\geqslant1$时，$|a_{k+1}|=||b_k|-|c_k||<\max\{|b_k|,|c_k|\}\leqslant d_k$，

$|b_{k+1}|=\|c_k|-|a_k\|<d_k,|c_{k+1}|=\|a_k|-|b_k\|<d_k$，

所以，$d_{k+1}=\max\{|a_{k+1}|,|b_{k+1}|,|c_{k+1}|\}<d_k$．

所以，$\{d_k\}$严格单调递减，

由d_2为有限正整数，

所以，必存在正整数$m\geqslant 3$，使得$d_m\leqslant 0$，矛盾．

所以，存在正整数$k\geqslant 3$，使a_k,b_k,c_k中至少有一个为0．

不妨设$a_k=0$，且$a_1\neq 0$，$a_2\neq 0$，$\cdots$，$a_{k-1}\neq 0$，

则$|b_{k-1}|=|c_{k-1}|$，且$|b_{k-1}|=|c_{k-1}|\neq|a_{k-1}|$，

否则，若$|b_{k-1}|=|c_{k-1}|=|a_{k-1}|$，

因为$a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1}=0$，则必有$a_{k-1}=b_{k-1}=c_{k-1}=0$，矛盾．

于是，$b_k=|c_{k-1}|-|a_{k-1}|\neq 0,c_k=|a_{k-1}|-|b_{k-1}|\neq 0$，且$b_k=-c_k$，

所以，$a_{k+1}=0$，$b_{k+1}=|c_k|,c_{k+1}=-|b_k|=-|c_k|$，

依次递推，即有：对$\forall n\geqslant k,a_n=0,b_{n+1}=|c_k|,c_{n+1}=-|c_k|$，且$|c_k|\neq 0$，

此时有且仅有一个数列$\{a_n\}$自第k项起各项均为0．

综上，结论成立．

例2 在无穷数列$\{a_n\}$中，a_1,a_2是给定的正整数，$a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）若$a_1=3,a_2=1$，写出a_9,a_{10},a_{100}的值；

（Ⅱ）证明：数列$\{a_n\}$中存在值为0的项；

（III）证明：若a_1,a_2互质，则数列$\{a_n\}$中必有无穷多项为1．

解析：(I) $a_9=0,a_{10}=1,a_{100}=1$．

(II)反证法：假设$\forall i$，$a_i\neq 0$.由于$a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，

记$M=\max\{a_1,a_2\}$.则$a_1\leq M,a_2\leq M$．

则$0<a_3=|a_2-a_1|\leq M-1$，$0<a_4=|a_3-a_2|\leq M-1$，

$0<a_5=|a_4-a_3|\leq M-2$，$0<a_6=|a_5-a_4|\leq M-2$，$\cdots$，

依次递推，有$0<a_7=|a_6-a_5|\leq M-3$，$0<a_8=|a_7-a_6|\leq M-3\ldots$，

则由数学归纳法易得$a_{2k+1}\leq M-k,k\in\mathbf{N}^*$.

当 $k > M$ 时，$a_{2k+1} < 0$, 与 $a_{2k+1} > 0$ 矛盾.

故存在 i，使 a_i=0.

所以，数列 $\{a_n\}$ 必在有限项后出现值为 0 的项.

(III)首先证明：数列 $\{a_n\}$ 中必有“1”项．用反证法，

假设数列 $\{a_n\}$ 中没有“1”项，由(II)知，数列 $\{a_n\}$ 中必有“0”项，设第一个“0”项是 $a_m \quad (m \geq 3)$，令 $a_{m-1} = p$，$p > 1, p \in \mathbf{N}^*$，则必有 $a_{m-2} = p$，

于是，由 $p = a_{m-1} = |a_{m-2} - a_{m-3}| = |p - a_{m-3}|$，则 $a_{m-3} = 2p$，因此 p 是 a_{m-3} 的因数，

由 $p = a_{m-2} = |a_{m-3} - a_{m-4}| = |2p - a_{m-4}|$，则 $a_{m-4} = p$ 或 $3p$，因此 p 是 a_{m-4} 的因数.

依次递推，可得 p 是 a_1, a_2 的因数，因为 $p > 1$，所以这与 a_1, a_2 互质矛盾．所以，数列 $\{a_n\}$ 中必有“1”项.

其次证明数列 $\{a_n\}$ 中必有无穷多项为“1”.

假设数列 $\{a_n\}$ 中的第一个“1”项是 a_k，令 $a_{k-1} = q$， $q > 1, q \in \mathbf{N}^*$，

则 $a_{k+1} = |a_k - a_{k-1}| = q - 1$，

若 $a_{k+1} = q - 1 = 1$，则数列中的项从 a_k 开始，依次为“1，1，0”的无限循环，

故有无穷多项为 1；

若 $a_{k+1} = q - 1 > 1$，则 $a_{k+2} = |a_{k+1} - a_k| = q - 2, a_{k+3} = |a_{k+2} - a_{k+1}| = 1$，

若 $a_{k+2} = q - 2 = 1$，则进入“1，1，0”的无限循环，有无穷多项为 1；

若 $a_{k+2} = q - 2 > 1$，则从 a_k 开始的项依次为 $1, q-1, q-2, 1, q-3, q-4, 1$，……，

必出现连续两个“1”项，从而进入“1，1，0”的无限循环，故必有无穷多项为 1.