

《创新压轴题——新定义》拓展提升测试参考答案

【拓展提升测试】

已知数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n$. 如果数列 $B_n: b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $b_1 = a_n$, $b_k + b_{k-1} = a_k + a_{k-1}$, 其中 $k = 2, 3, \dots, n$, 则称 B_n 为 A_n 的“陪伴数列”.

(I) 写出数列 $A_4: 3, 1, 2, 5$ 的“陪伴数列” B_4 ;

(II) 若 A_9 的“陪伴数列”是 B_9 . 试证明: b_9, a_9, a_1 成等差数列.

(III) 若 n 为偶数, 且 A_n 的“陪伴数列”是 B_n , 证明: $b_n = a_1$.

【解析】(I) 解 $B_4: 5, -1, 4, 3$3 分

(II) 证明: 对于数列 A_n 及其“陪伴数列” B_n ,

因为 $b_1 = a_9$,

$$b_1 + b_2 = a_1 + a_2,$$

$$b_2 + b_3 = a_2 + a_3,$$

.....

$$b_8 + b_9 = a_8 + a_9,$$

将上述几个等式中的第 2, 4, 6, 8, 这 4 个式子都乘以 -1 , 相加得

$$b_1 - (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) - \dots + (b_8 + b_9) = a_9 - (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) - \dots + (a_8 + a_9)$$

$$\text{即 } b_9 = a_9 - a_1 + a_9 = 2a_9 - a_1$$

$$\text{故 } 2a_9 = b_9 + a_1$$

所以 b_9, a_9, a_1 成等差数列.8 分

(III) 证明: 因为 $b_1 = a_n$,

$$b_1 + b_2 = a_1 + a_2,$$

$$b_2 + b_3 = a_2 + a_3,$$

.....

$$b_{n-1} + b_n = a_{n-1} + a_n,$$

由于 n 为偶数，将上述 n 个等式中的第 $2, 4, 6, \dots, n$ 这 $\frac{n}{2}$ 个式子都乘以 -1 ，相加得

$$b_1 - (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) - \dots - (b_{n-1} + b_n) = a_n - (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) - \dots - (a_{n-1} + a_n)$$

$$\text{即 } -b_n = -a_1, \quad b_n = a_1. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$