

《创新压轴题——新定义》课后作业参考答案

【课后作业】

(2016 北京高理 20 题) 设数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_N (N \geq 2)$. 如果对小于 $n (2 \leq n \leq N)$ 的每个正整数 k 都有 $a_k < a_n$, 则称 n 是数列 A 的一个“ G 时刻”. 记 $G(A)$ 是数列 A 的所有“ G 时刻”组成的集合.

(1) 对数列 $A: -2, 2, -1, 1, 3$, 写出 $G(A)$ 的所有元素.

(2) 证明: 若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n > a_1$, 则 $G(A) \neq \emptyset$.

(3) 证明: 若数列 A 满足 $a_n - a_{n-1} \leq 1 (n = 2, 3, \dots, N)$, 则 $G(A)$ 的元素个数不小于 $a_N - a_1$.

【分析】(1) 关键是理解 G 时刻的定义, 根据定义即可写出 $G(A)$ 的所有元素;

(2) 要证 $G(A) \neq \emptyset$, 即证 $G(A)$ 中至少含有一元素即可;

(3) 当 $a_N \leq a_1$ 时, 结论成立, 只要证明当 $a_N > a_1$ 时结论成立即可.

【解答】(1) $G(A)$ 的元素为 2 和 5;

(2) 因为存在 a_n 使得 $a_n > a_1$, 所以 $\{i \in N^* \mid 2 \leq i \leq N, a_i > a_1\} \neq \emptyset$.

记 $m = \min\{i \in N^* \mid 2 \leq i \leq N, a_i > a_1\}$,

则 $m \geq 2$, 且对任意正整数 $k < m, a_k \leq a_1 < a_m$,

因此 $m \in G(A)$, 从而 $G(A) \neq \emptyset$.

(3) 当 $a_N \leq a_1$ 时, 结论成立;

当 $a_N > a_1$ 时, 由 (2) 知 $G(A) \neq \emptyset$

设 $G(A) = \{n_1, n_2, \dots, n_p\}, n_1 < n_2 < \dots < n_p$,

记 $n_0 = 1$, 则 $a_{n_0} < a_{n_1} < \dots < a_{n_p}$,

对 $i = 0, 1, \dots, p$, 记 $G_i = \{k \in N^* \mid n_i < k \leq N, a_k > a_{n_i}\}$.

如果 $G(A) \neq \emptyset$, 取 $m_i = \min G_i$, 则对任何 $1 \leq k < m_i, a_k \leq a_{n_i} < a_{m_i}$.

从而 $m_i \in G(A)$ 且 $m_i = n_{i+1}$,

又因为 n_p 是 $G(A)$ 中的最大元素, 所以 $G_p = \emptyset$.

从而对任意 $n_p \leq k \leq N, a_k \leq a_{n_p}$, 特别的, $a_N \leq a_{n_p}$.

对 $i = 0, 1, \dots, p-1$, $a_{n_{i+1}-1} \leq a_{n_i}$.

因此, $a_{n_{i+1}} = a_{n_{i+1}-1} + (a_{n_{i+1}} - a_{n_{i+1}-1}) \leq a_{n_i} + 1$.

所以 $a_N - a_1 \leq a_{n_p} - a_1 = \sum_{i=1}^p (a_{n_i} - a_{n_{i-1}}) \leq p$.

因此则 $G(A)$ 的元素个数 p 不小于 $a_N - a_1$.