《创新压轴题——新定义》学习指南

北京市陈经纶中学　　陈旭

【学习目标】

1、加强阅读理解题意，在读懂文字语言、数学符号语言的基础上理解新定义、把握新定义、应用新定义；

2、体会从具体到抽象、从特殊到一般的研究问题的思想方法；

3、体会新旧知识间的内在的联系，在本质联系中找到突破口，提升学习力；

4、 学会用规范、准确、抽象的数学语言书写表达解题的完整思路；

5、积累解题方法和经验，提升综合解决问题的能力；

【典型例题】已知项数为 $m(m\in N^*,m\geq 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足如下条件：① $a_n\in N^*(n=1,2,...,m)$；② $a_1<a_2<...<a_m$.若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{(a_1+a_2+...+a_m)-a_n}{m-1}\in N^*$，其中 $n=1,2,...,m$，则称 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的“伴随数列”.

（Ⅰ）数列 $1,3,5,7,9$ 是否存在“伴随数列”，若存在，写出其“伴随数列”；若不存在，请说明理由；

（Ⅱ）若 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的“伴随数列”，证明：$b_1>b_2>...>b_m$；

（Ⅲ）已知数列 $\{a_n\}$ 存在“伴随数列” $\{b_n\}$，且 $a_1=1$，$a_m=2049$，求 m 的最大值.

【分析】

【解题过程】

（Ⅰ）数列 $1,3,5,7,9$ 不存在“伴随数列”.

因为 $b_4=\dfrac{1+3+5+7+9-7}{5-1}=\dfrac{9}{2}\notin N^*$，

所以数列 $1,3,5,7,9$ 不存在“伴随数列”.

（Ⅱ）因为 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{m-1}$，$1\leq n\leq m-1,n\in N^*$

又因为 $a_1<a_2<\cdots<a_m$，所以有 $a_n-a_{n+1}<0$

所以 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{m-1}<0$，

所以 $b_1>b_2>\cdots>b_m$ 成立.

（III）由（II）$\forall 1 \le i < j \le m$，都有 $b_i - b_j = \dfrac{a_j - a_i}{m-1}$，

因为 $b_i \in N^*$，$b_1 > b_2 > \cdots > b_m$．　所以 $b_i - b_j \in N^*$，

所以 $b_i - b_j = \dfrac{a_j - a_i}{m-1} \in N^*$

所以 $b_1 - b_m = \dfrac{a_m - a_1}{m-1} = \dfrac{2048}{m-1} \in N^*$

因为 $b_{n-1} - b_n = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{m-1} \in N^*$，

所以 $a_n - a_{n-1} \ge m-1$

又 $a_m - 1 = (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)$

$\ge (m-1) + (m-1) + \cdots + (m-1) = (m-1)^2$

所以 $(m-1)^2 \le 2048$，所以 $m \le 46$

又 $\dfrac{2048}{m-1} \in N^*$，所以 $m \le 33$

又当 $a_n = 64n - 63$（$1 \le n \le 33$），满足题意，

所以，m 的最大值是 33.

【小结提升】

（1）新定义问题，是高考命制创新型试题的一个热点，常见的命题形式有新概念、新性质、新法则等，难度中等或偏上。

（2）破解“新定义”问题的思路方法

①紧扣“新”定义：分析新定义的特点，把新定义所叙述的问题的本质弄清楚，并能够应用到具体的解题过程之中，这是破解新定义型集合问题的关键；

②把握“新”性质：相关的知识及它们已有的性质是破解新定义型问题的基础，也是突破口。在解题时要善于从试题中发现可以使用的熟悉的知识性质的一些因素，在关键之处用好性质；

③遵守“新”法则：准确把握新定义的运算法则，将其转化为基本运算即可．运算往往也是突破难点的关键口，关注运用好运算法则，学会用运算结果说明问题、转化问题。

【学法建议】

1、树立信心，积累经验，加强练习，攻坚克难；

2、学会审题，迅速理解题意，抓住问题本质；

3、搭建桥梁，沟通联系，灵活转化，多角度思考问题，突破难点；

4、习惯从具体到抽象，用简洁规范的数学语言表达。