【课后作业】

1、是否存在 $1,2,3,\cdots,2019,2$ 的一个排列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2019},a_{2020}$，使得：对任意的 $1\le k\le 2020, a_k+k$ 是完全平方数?

【答案】

分析：答案是肯定的. 只需给出满足要求的构造

存在这样的数列，构造如下：

构造 1：令 $a_n=\begin{cases}49-n,1\le n\le 48,\\144-n,49\le n\le 95,\\2116-n,96\le n\le 202\end{cases}$，则数列 $\{a_n\}$ 是 $1,2,3,\cdots,2019,2020$ 的一个排列，且

$$a_n+n=\begin{cases}49=7^2,1\le n\le 48,\\144=12^2,49\le n\le 95,\\2116=46^2,96\le n\le 2020\end{cases}$$，故命题得证。

构造 2：令 $a_n=\begin{cases}4-n,1\le n\le 3,\\9-n,4\le n\le 5,\\289-n,6\le n\le 283,\\2304-n,284\le n\le 2020\end{cases}$，则数列 $\{a_n\}$ 是 $1,2,3,\cdots,2019,2020$ 的一个排列，且

$$a_n+n=\begin{cases}4=2^2,1\le n\le 3,\\9=3^2,4\le n\le 5,\\289=17^2,6\le n\le 283,\\2304=48^2,284\le n\le 2020\end{cases}$$，故命题得证。

构造 3：令 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\1,n=3,\\1934,n=2,\\2,n=1934,\\1440,n=4,\\4,n=1440,\\585,n\le 91,\\91,n=585,\\2025-n,n=\text{其它}\end{cases}$，则数列 $\{a_n\}$ 是 $1,2,3,\cdots,2019,2020$ 的一个排列，且

$$a_n+n=\begin{cases}4=2^2, n=1\text{或}3,\\1936=44^2, n=2\text{或}1934,\\1444=38^2, n=4\text{或}1440,\\676=26^2, n=91\text{或}585,\\2025=45^2, n=\text{其它}\end{cases}$$，故命题得证。

构造 4：令 $a_n=\begin{cases}3, n=1,\\1, n=3,\\14, n=2,\\2, n=14,\\192, n=4,\\4, n=192,\\2011, n=1833,\\1833, n=2011,\\2025-n, n=\text{其它}\end{cases}$，则数列 $\{a_n\}$ 是 $1,2,3,\cdots,2019,2020$ 的一个排列，且

$$a_n+n=\begin{cases}4=2^2, n=1\text{或}3,\\16=4^2, n=2\text{或}14,\\196=14^2, n=4\text{或}192,\\3844=62^2, n=1833\text{或}20\\2025=45^2, n=\text{其它}\end{cases}$$，故命题得证。

2、能否将一个正方体划分为 2020 个互不重叠的小正方体？

【答案】

解答：可以，理由如下.

引理 1：对任意的正整数 n，如果一个正方体可以划分为 n 个小正方体，则它可以划分为 $n+7$ 个小正方体.

证明：设该正方体可以划分为 n 个互不重叠的小正方体 A(1)， A(2)， …，A（n-1），A(n). 设正方体 A(n)的棱长为 2x，则它可以划分为 8 个互不重叠的棱长为 x 的小正方体 B（1），B（2），B（3），B（4），B（5），B（6），B（7），B（8）. 则原正方体可以划分为 $n+7$ 个互不重叠的小正方体 A(1)，A(2)， …，A（n-1）， B（1），B（2），B（3），B（4），B（5），B（6），B（7），B（8）.

引理 2：对任意的正整数 n，如果一个正方体可以划分为 n 个小正方体，则它可以划分为 $n+26$ 个小正方体.

证明：设该正方体可以划分为 n 个互不重叠的小正方体 A(1)， A(2)， …，A（n-1），A(n). 设正方体 A(n)的棱长为 3y，则它可以划分为 27 个互不重叠的棱长为 y 的小正方体 C(1)，C(2)，…，C（26），C（27）. 则原正方体可以划分为 $n+26$ 个互不重叠的小正方体 A(1)，A(2)， …，A（n-1）， C（1），C（2），…，C（26），C（27）.

注意到：2020=1+2*26+281*7，故可以将一个正方体划分为 2020 个互不重叠的小正方体。