《创新压轴题-构造与论证》拓展提升测试答案

（2013 年朝阳一模）设 $\tau=(x_1,x_2,\cdots,x_{10})$ 是数 1，2，…，10 的任意一个全排列，定义 $S(\tau)=\sum_{k=1}^{10}|2x_k-3x_{k+1}|$，其中 $x_{11}=x_1$。

（Ⅰ）若 $\tau=(10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$，求 $S(\tau)$ 的值；

（Ⅱ）求 $S(\tau)$ 的最大值。

（Ⅲ）求使 $S(\tau)$ 达到最大值的所有排列 τ 的个数.

【解答】:

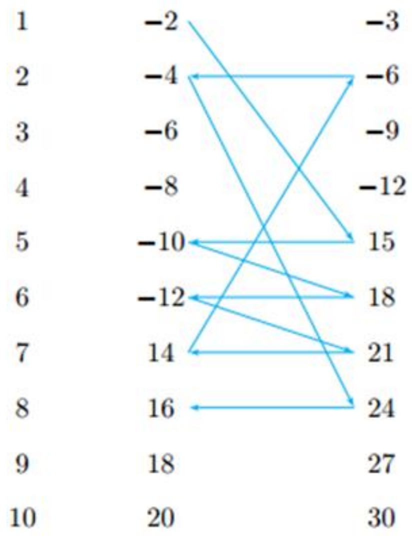
（Ⅰ）$\because \tau=(10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$，$x_{11}=x_1$，

$$\therefore S(\tau)=\sum_{k=1}^{10}|2x_k-3x_{k+1}|=7+6+5+4+3+2+1+0+1+28=57$$ …（3 分）

（Ⅱ）数 10，9，8，7，6，5，4，3，2，1 的 2 倍与 3 倍分别如下：20，18，16，14，12，10，8，6，4，2，30，27，24，21，18，15，12，9，6，3

其中较大的十个数之和与较小的十个数之和的差为 203﹣72=131，所以 S（τ）≤131.

接下来构造 $S(\tau)=131$ 的情形．如图，不妨从-2 开始，指向一个符号相反的数，如 15，然后对应到-10，再指向一个符号相反的数，如 18，然后对应到-12，…，直到最后一个数 20 对应回-3，



此时对应的排列 τ_0=（1，5，6，7，2，8，3，9，4，10），满足 S（τ_0）=131，

所以 S（τ）的最大值为 131．…（8 分）

（Ⅲ）由于数 1，2，3，4 所产生的 8 个数都是较小的数，而数 7，8，9，10 所产生的 8 个数都是较大的数，所以使 S（τ）取最大值的排列中，必须保证数 1，2，3，4 互不相邻，数 7，8，9，10 也互不相邻；而数 5 和 6 既不能排在 7，8，9，10 之一的后面，又不能排在 1，2，3，4 之一的前面．设 x_1=1，并参照下面的符号排列 1△○□△○□△○□△○

其中 2，3，4 任意填入 3 个□中，有 6 种不同的填法；7，8，9，10 任意填入 4 个圆圈○中，共有 24 种不同的填法；5 填入 4 个△之一中，有 4 种不同的填法；6 填入 4 个△中，且当与 5 在同一个△时，既可以在 5 之前又可在 5 之后，共有 5 种不同的填法，所以当 x_1=1 时，使 S（τ）达到最大值的所有排列 τ 的个数为 6×24×4×5=2880，由轮换性知，使 S（τ）达到最大值的所有排列 τ 的个数为 28800．…（13 分）