**《创新压轴题---构造与论证》学习指南**

北京市陈经纶中学 龚浩生

【学习目标】

1、体会从具体到抽象、从特殊到一般的研究问题的思想方法；

2、学会构造特例进行论证；

3、学会归纳类比，大胆猜想，小心求证。

【典型例题】

【例题】（2014海淀一模理）在平面直角坐标系中，对于任意相邻三点都不共线的有序整点列（整点即横纵坐标都是整数的点）：与：，其中，若同时满足：

①两点列的起点和终点分别相同；②线段，其中，

则称与互为**正交点列**.

（Ⅰ）求：的正交点列；

（Ⅱ）判断：是否存在正交点列？并说明理由；

（Ⅲ）**N**，是否都存在无正交点列的有序整点列？并证明你的结论.

 [试题分析]

（I）由条件①，丙点列、起点和终点分别相同，故只须求一个中间点，可利用条件②，结合向量垂直得数量积为0，建立方程组求 解；

（II）这种存在性探索问题，一般先假设存在符合条件的对象，再按条件进行求解、判断。注意到两正交点列的起点和终点分别相同，则有，又由，可根据向量的坐标，表达的坐标，从而可由向量相等的意义及坐标表示建立方程组求解判断。

（III）本问是对无正交点列的有序整点列的探索，注意第（II）问的结论与特例的研究，从而作出一般性的构造性证明。

[解题过程]

（Ⅰ）设点列的正交点列是,

由正交点列的定义可知,设，

，，

由正交点列的定义可知 ,,

即 解得

所以点列的正交点列是.------3分

（Ⅱ）由题可得 ，

设点列是点列的正交点列，

则可设,****

因为相同，所以，故有



因为****，方程（2）显然不成立，

所以有序整点列不存在正交点列；---------------8分

（Ⅲ）****，都存在整点列无正交点列. -------------------------9分

****，设其中是一对互质整数，

若有序整点列 是点列正交点列,

则，且，

则有 

①当为偶数时，取.

由于是整点列，所以有****，.

等式（2）中左边是3的倍数，右边等于1，等式不成立，

所以该点列无正交点列；

②当为奇数时，

取,,

由于是整点列，所以有****，.

等式（2）中左边是3的倍数，右边等于1，等式不成立，

所以该点列无正交点列.

综上所述，，都不存在无正交点列的有序整数点列--------13分

【小结提升】

充分利用向量的坐标表示与运算是解决本题第（Ⅱ）（Ⅲ）问的关键。而解决第（Ⅲ）问的主要思想方法是通过第（Ⅱ）问的结论，发现一个特例并领悟这个特例的本质所在，进而构造出一个具体的向量序列进行论证。论证中的一个细节是奇偶讨论、区别构造。

【学法建议】

 1、透过解题过程重点领悟解题思路怎么形成，什么地方自己可以想到的，什么是自己想不到的，为什么想不到，该怎样想！

2、解题过程的表达，符号语言的运用也是创新压轴题的一个难点，另外，借助直观形象理解并表达题意常常对解题有重要帮助，也应多加体会和领悟。

3、对于存在性问题，若能构造出一个具体实例，即可说明存在；若要否定，则需对全体进行否定，这就要作一般的推理论证。构造特例可以由简单到复杂、由特殊到一般，发现规律寻找方法。