高一年级数学第 23 课时
三角形的秘密指南答案
复习任务单

【学习目标】

1、 知道三角形的重心、内心、外心分别是什么

2、 理解三角形的重心的性质，并能够证明

3、 借助信息技术探究三角形的相关性质，培养推理论证能力，发展数学抽象、直观想象、逻辑推理等核心素养

4、 【学法指导】

首先观看视频，在老师提问的地方可以先暂停视频，独立思考。然后再继续观看。对于借助信息技术发现的一些三角形的性质，可以尝试独立证明。

在观看视频结束后，回忆学习内容。尝试回答下列问题

本节课我学到了什么知识？我是通过什么方法获得这些知识的？

【问题清单】

问题 1 回忆我们已经学习过三角形的哪些几何性质？

问题 2 什么是三角形的重心？重心有哪些性质呢？

问题 3 什么是三角形的内心？内心有哪些性质呢？

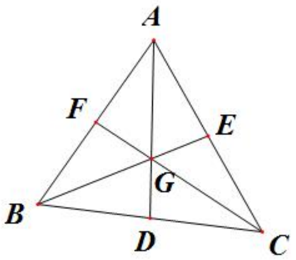
问题 4 什么是三角形的外心？外心有哪些性质呢？

问题 5 什么是射影定理？

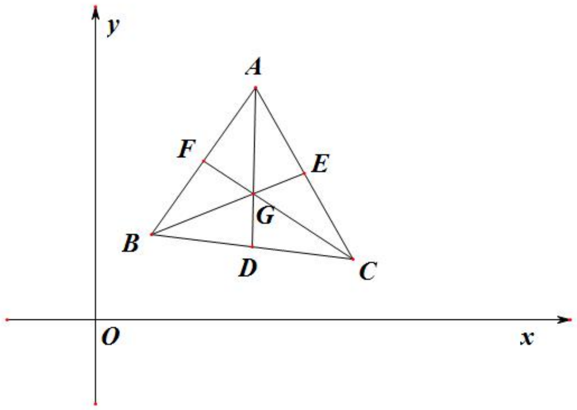
【知识梳理】

1. 三角形三条中线交于一点，这点叫作三角形的重心；

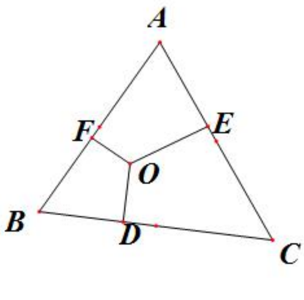
2. 重心的性质



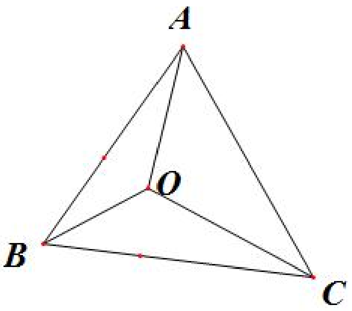
①如果G是三角形ABC重心，那么$\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}$



②在平面直角坐标系xOy中，若$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，则三角形$ABC$的重心$G$的坐标是$(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$



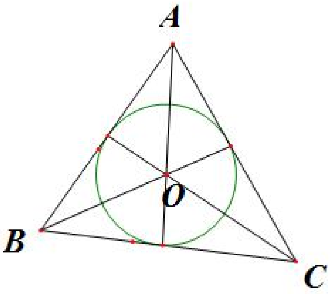
③若O为三角形ABC内动点，$OF\perp AB,OD\perp CB,OE\perp AC$，$G$为三角形$ABC$的重心，则$|OF|\cdot|OD|\cdot|OE|\le|GF|\cdot|GD|\cdot|GE|$，当且仅当$O$为重心时，等号成立.



④若O为三角形ABC内动点，G为三角形ABC的重心，

则$|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2 \geq |GA|\cdot|GB|\cdot|GC|$，当且仅当$O$为重心时，等号成立.

3．三角形内心的性质



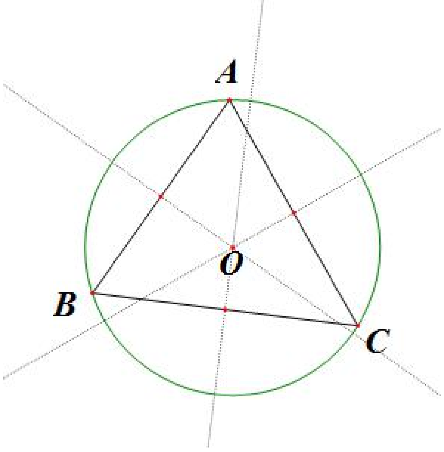
①三角形三个内角的角平分线交于一点，称为三角形的内心

②内心是三角形的内切圆的圆心，内心到三边的距离相等

③三角形的面积可以通过$S=\frac{1}{2}Cr$计算，其中C为三角形的周长，r为三角形的内切圆半径

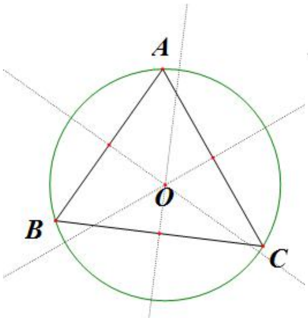
④直角三角形内切圆半径满足$r=\frac{a+b-c}{2}$，其中a,b为直角边，c为斜边.

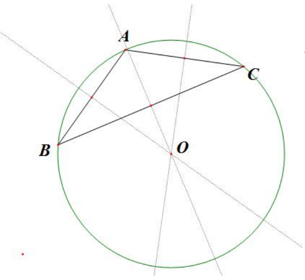
4．三角形外心的性质

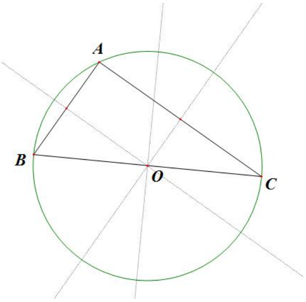


①三角形三边的垂直平分线交于一点，这点称为三角形的外心

②外心是三角形的外切圆的圆心，外心到三角形三个顶点的距离相等

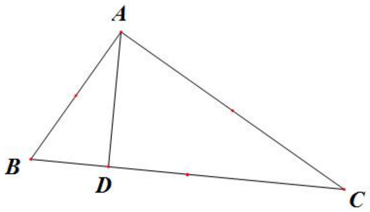






锐角三角形外心在三角形内部；钝角三角形外心在三角形外部；
直角三角形外心是斜边中点（直径对直角；直角三角形斜边中线等于斜边一半）

5. 射影定理

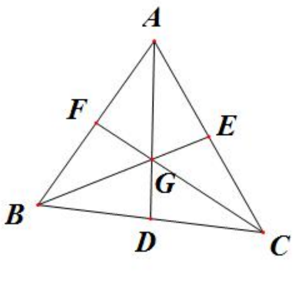


三角形 ABC 中，若 $\angle BAC = 90°, AD \perp BC$ ；

则有
$$AD^2 = BD \cdot CD$$
$$AB^2 = BC \cdot BD$$
$$AC^2 = CD \cdot BC$$

【典型问题】

例 1. 如果 G 是三角形 ABC 重心，那么 $\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$



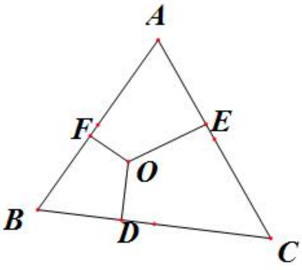
证明：连接 EF ，因为 E, F 分别是 AB, AC 中点，所以 $EF // BC, \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$

所以 $\triangle EFG \sim \triangle BCG$.

所以$\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FG}{GD}=\dfrac{EG}{BG}=\dfrac{1}{2}$.

【注】这是三角形的重心的重要性质，在以后向量，立体几何中，都可能会用到.

例 2.若O为三角形ABC内动点，$OF\perp AB,OD\perp CB,OE\perp AC$，$G$为三角形$ABC$的重心，则$|OF|\cdot|OD|\cdot|OE|\le|GF|\cdot|GD|\cdot|GE|$，当且仅当$O$为重心时，等号成立.



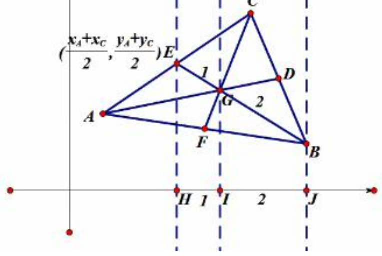
证明：由于$OF\perp AB,OD\perp CB,OE\perp AC$，

所以$OE=\dfrac{2S_{\vartriangle AOC}}{AC},OD=\dfrac{2S_{\vartriangle BOC}}{BC},OF=\dfrac{2S_{\vartriangle AOB}}{AB}$

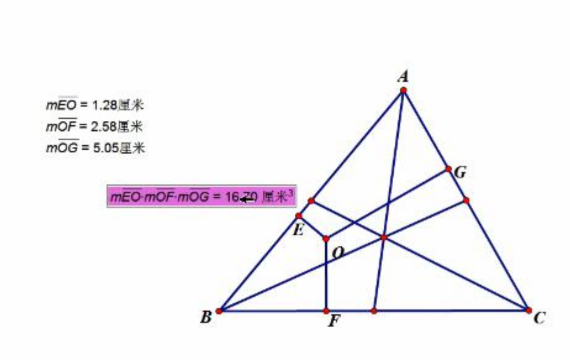
所以$OE\cdot OF\cdot OD=\dfrac{8}{AB\cdot AC\cdot BC}\cdot S_{\vartriangle AOC}\cdot S_{\vartriangle AOB}S_{\vartriangle BOC}$

因为$S_{\vartriangle AOB}+S_{\vartriangle AOC}+S_{\vartriangle COB}=S_{\vartriangle ABC}$为定值，所以当且仅当$S_{\vartriangle AOB}=S_{\vartriangle AOC}=S_{\vartriangle COB}=\dfrac{1}{3}S_{\vartriangle ABC}$时，$OE\cdot OF\cdot OD$取得最大值；此时$O$为三角形的重心$G$.

【方法规律】



1.利用平行线分线段成比例定理，可以将线段的比例转化为坐标的比例；在这个过程中，将二维三图形投影到一维的坐坐标轴上，体现了转化化归的数学思想；并且更进一步，在立体几何中，可以借助类似的方法将空间问题平面化。



2.借助信息技术进行观察探究活动，能极大的提升探究问题的效率，并且将抽象问题直观化。通过观察、归纳、猜想、操作确认、推理论证等方法路径，探究新的问题。