

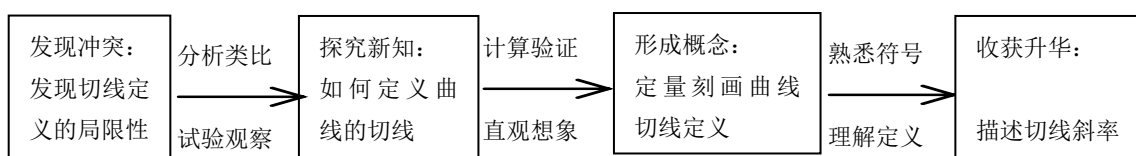
函数的性质进一步研究第 2 课时学习指南

一、学习目标：

1. 通过对切线定义的再建构过程，感受重新定义切线的必要性，理解切线的含义；
2. 通过探究切线斜率的表示方法，初步体会极限思想在解决问题中的应用，体会新知建构过程中的类比归纳，数形结合思想的运用；
3. 通过几何直观的演示和数据分析，揭示割线与切线之间的内在联系，体会通过静态逼近而把握动态，利用近似去探索精确的辩证思想；体会探索数学知识的绝对自由，感受创新的魅力和创造的勇气。

二、学法指导：

前面我们复习了函数的性质，本节研究曲线的切线，是函数一章学习的延续和深化，也进一步认识极限概念。通过几何直观的演示和数据分析，揭示割线斜率与切线斜率之间的关系，理解曲线切线的斜率就是创设导数概念的实际背景，认识切线概念的形成。

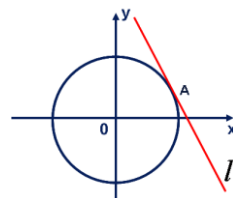


三、学习过程

（一）新旧对比，认知冲突，重新定义曲线的切线成为必要

问题 1：请大家回顾，圆的切线是怎么定义的？

预案 1：当直线和圆有唯一公共点时，这条直线就叫做圆的切线，这个唯一公共点叫做切点。



预案 2：当圆心到直线的距离等于半径时，直线与圆相切。

预案 3：联立直线与圆的方程，若 $\Delta = 0$ ，则直线与圆相切。

无论 $d=r$ 法，还是 $\Delta=0$ ，体现在图形上都是直线与圆的交点个数有且只有一个

问题 2：画出过点 $(1, 1)$ 且与抛物线 $y = x^2$ 有且只有一个公共点的直线。

谁是抛物线在点 $(1, 1)$ 处的切线？抛物线有一个交点的直线一定是抛物线的切线吗？

预案 1：对于直线 $x=1$ 与抛物线 $y = x^2$ 有一个交点，但它并不是切线。

预案 2：对于任意常数 a ，直线 $x=a$ 与抛物线 $y = x^2$ 有一个交点，但它并不是切线。

问题：还能用公共点个数有且只有一个来定义曲线的切线吗？

预案：直线与曲线相切的位置关系不能单纯靠交点个数来判断。

问题：如何来确定曲线的切线位置呢？

在学习直线和圆的相切的位置关系时，联立直线与圆的方程， $\Delta = 0$ 体现直线与圆有两个相同的交点. 直线与圆相交时，直线与圆有两个不同的交点，相切有两个相同的交点，它们之间可以建立联系吗？

预设 1：可以认为两个不同的交点运动成为两个相同的交点.

预设 2：直线与圆相交，从图形的角度看，随着相交时的两个交点无限接近，运动到了切线的位置，那么对于一般曲线，直线与曲线有两个交点（割线），当两个交点无限接近，到达一个交点时对应的那条直线称为曲线的切线.

（二）定义曲线上在某点处的切线

P 和 Q 是曲线 C 上邻近的两点， P 是定点，当点 Q 沿着曲线 C 无限地接近 P 点时，割线 PQ 的极限位置 PT 叫做曲线 C 在点 P 处的切线，点 P 叫做切点.

或者切线定义：曲线上割线的极限位置为切线.

（三）从几何直观和数值的角度探究割线斜率与切线斜率的关系

问题 3：结合曲线切线的定义，描述 $y = x^3$ 在点 $A(1, 1)$ 处的切线是怎么形成的？

问题 4：曲线的切线与割线有着密切的关系，那么能否通过割线的斜率得出切线的斜率呢？

预案 1：在点 A 附近取点，计算过点 A 的割线的斜率，观察算得的结果，总结规律，确定在点 A 处的切线斜率.

分解任务 1：求过点 $A(1, 1^3)$ ， $P_1(3, 3^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $A(1, 1^3)$ ， $P_2(2, 2^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $A(1, 1^3)$ ， $P_3(1.1, 1.1^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $A(1, 1^3)$ ， $P_4(1.001, 1.001^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $A(1, 1^3)$ ， $P_5(1.0001, 1.0001^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $A(1, 1^3)$ ， $P_6(1.00001, 1.00001^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $A(1, 1^3)$ ， $P_7(1.000001, 1.000001^3)$ 的直线的斜率.

问题：当 $P_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 向 A 逐步逼近的时候你发现了什么？

从数据分析的角度，当点 P_n 沿着曲线从右侧无限逼近点 A ，割线 AP_n 的斜率逼近数值 3，

我们可以说，此时在点 A 处的切线的斜率为 3.

分解任务 2: 求过点 $Q_1 (\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^3)$ ， $A (1, 1^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $Q_2 (0.9, (0.9)^3)$ ， $A (1, 1^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $Q_3 (0.99, (0.99)^3)$ ， $A (1, 1^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $Q_4 (0.999, (0.999)^3)$ ， $A (1, 1^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $Q_5 (0.99999, (0.99999)^3)$ ， $A (1, 1^3)$ 的直线的斜率.

求过点 $Q_6 (0.999999, (0.999999)^3)$ ， $A (1, 1^3)$ 的直线的斜率.

问题：当 $Q_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 向 A 逐步逼近的时候你发现了什么？

从数据分析的角度，当点 Q_n 沿着曲线从左侧无限逼近点 A ，割线 AQ_n 的斜率逼近数值 3，我们可以说此时在点 A 处的切线的斜率为 3.

根据对分解任务 1、任务 2 的计算及对数据的分析，可以得到曲线上的点无论从点 A 的左侧逼近，还是从点 A 的右侧逼近，过点 A 的割线斜率都逼近数值 3，我们可以说此时在点 A 处的切线的斜率为 3.

预案 2: 根据切线定义，先在 $(1, 1)$ 附近取点，记为 (x_1, x_1^3) ，于是写出割线的斜率

$$k = \frac{x_1^3 - 1}{x_1 - 1} = \frac{(x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 1)}{x_1 - 1} = x_1^2 + x_1 + 1$$
，当 $x_1 \rightarrow 1$ 时， $x_1^2 + x_1 + 1$ 的值就是切线的斜率.

如何使用 $x_1 \rightarrow 1$ 这个条件？

利用电脑的 Excel，共同感受一下 $x_1 \rightarrow 1$ ，从左右两侧逼近于 1，进行数据分析，得到切线斜率就趋近于数值 3.

预案 3: 点 $(1, 1)$ 附近的点也可表示为 $(1, 1 + \Delta x)$ ，于是写出割线的斜率

$$k = \frac{(1 + \Delta x)^3 - 1}{\Delta x} = 3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$$
，此时 $\Delta x \rightarrow 0$ ， $3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \rightarrow 3$.

问题 5: 根据上面的探究，对于一般函数 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率该怎么表示呢？

预案 1: 出现如下结构的表达式: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, x_1 \rightarrow x_2, \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}, x_n \rightarrow x_0$

预案 2: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \Delta x \rightarrow 0$

曲线切线的斜率: 设 $P(x_0, y_0), Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为曲线上两点, 其割线 PQ 的斜率

为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 趋近于一个确定值, 这个确定值就是曲线在 P 点处切线的斜率, 记为:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(四) 总结提升

(1) 回顾本节课, 你印象最深刻的内容是什么, 你有什么体会?

(2) 切线定义的探究上, 我们用了哪些研究问题的手段, 从中可以得到那些有益的思考方法?

(3) 求一般曲线的切线斜率, 你可以怎么做?

(五) 课堂练习

求函数 $y = -\frac{2}{x}$ 在点 $P(1, -2)$ 处的切线方程.