

《函数的性质进一步研究第 1 课时》学习指南

一、学习目标：

1.通过问题研究，复习函数的单调性、周期性、奇偶性（对称性）、最大（小）值等知识点，进一步巩固用函数图象和代数运算的方法研究函数的性质，培养分析和解决函数问题的综合能力；

2.提升直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养.

二、学习任务：

例 1（2020 年北京市高考适应性测试）

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1)$ ，其图象如图所示，函数 $g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，满足

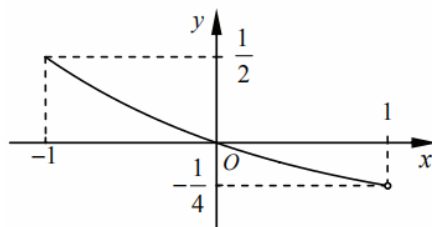
$g(2-x) + g(x) = 0$ ，且当 $x \in (0, 1)$ 时， $g(x) = f(x)$. 给出下列三个结论：

① $g(0) = 0$ ；

② 函数 $g(x)$ 在 $(-1, 5)$ 内有且仅有 3 个零点；

③ 不等式 $f(-x) < 0$ 的解集为 $\{x \mid -1 < x < 0\}$.

其中，正确结论的序号是_____.



例 2（2019 西城高三期末）

已知函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + k$ ，若存在区间 $[a, b]$ ，使得函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[a+1, b+1]$ ，则实数 k 的取值范围为（ ）

- (A) $(-1, +\infty)$ (B) $(-1, 0]$ (C) $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{4}, 0\right]$

例 3 对于函数 $f(x)$ ，若存在 $x_0 \in R$ ，使 $f(x_0) = x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

已知函数 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + b - 1 (a \neq 0)$.

(1) 当 $a = 1, b = -2$ 时，求函数 $f(x)$ 的不动点；

(2) 若对任意实数 b ，函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围.

三、归纳总结：

函数是高中数学的重要内容，它和数学各章知识都有着密切的联系，函数思想贯穿于整个高中数学之中，函数内容蕴含着丰富的辩证思想.

理解把握函数知识，可以从函数的概念与性质出发，而单调性是反映函数变化规律的一个最基本的性质，是函数概念的拓展与深化，也是研究函数其他性质和解决函数综合问题的基础与工具.

我们可以通过单调性的定义、图象、性质等去研究具体函数的单调性，那么对于下面这些函数 $f(x) = x \ln(x+1) - ax^2$ ， $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{e^x}$ ， $h(x) = x \cos x - \sin x$ ，如何研究函数的单调性和其他性质呢？在后面的学习中，我们会进一步研究.