不等式单元检测答案

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x\leqslant 1\}$， $B=\{x\,|\,(x-2)(x+1)<0\}$，那么 $A\cap B=$

(A) $\{x\,|\,-1<x<2\}$ (B) $\{x\,|\,-1\leqslant x<1\}$

(C) $\{x\,|\,1\leqslant x<2\}$ (D) $\{x\,|\,-1<x\leqslant 1\}$

【答案】D

2.【2018 全国高考 I 卷理数】已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-x-2>0\right\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$

A. $\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$ B. $\left\{x\middle|-1\le x\le 2\right\}$

C. $\left\{x\,|\,x<-1\right\}\cup\left\{x\,|\,x>2\right\}$ D. $\left\{x\,|\,x\le -1\right\}\cup\left\{x\,|\,x\ge 2\right\}$

【答案】B

3.已知集合 $A=\left\{x\middle|(x+1)(x-4)\le 0\right\}$， $B=\left\{x\middle|\log_2 x\le 2\right\}$， 则 $A\cap B=$

A. $\left[-2,4\right]$ B. $\left[1,+\infty\right)$

C. $\left(0,4\right]$ D. $\left[-2,+\infty\right)$

【答案】C

【解析】 $A=\left\{x\middle|(x+1)(x-4)\le 0\right\}=\left[-1,4\right]$， $B=\left\{x\middle|\log_2 x\le 2\right\}=\left(0,4\right]$，

故 $A\cap B=\left(0,4\right]$， 故选 C.

4. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}-a\ (a\in\mathbf{R})$， $g(x)=-x^2+4x+3$，在同一平面直角坐标系里，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 y 轴右侧有两个交点，则实数 a 的取值范围是

A. $\left\{a\middle|a<-3\right\}$ B. $\left\{a\middle|a>-3\right\}$ C. $\left\{a\middle|a=-3\right\}$ D. $\left\{a\middle|-3<a<4\right\}$

【答案】B

5.若对任意的 $x\in(0,+\infty)$， 都有 $x+\dfrac{1}{x}\ge a$， 则 a 的取值范围是

(A) $(-\infty,2)$　　(B) $(-\infty,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

【答案】B

6.【2019年高考浙江卷】若 $a>0,b>0$，则“$a+b\le 4$”是“$ab\le 4$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】当 $a>0,\ b>0$ 时，$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 当且仅当 $a=b$ 时取等号，则当 $a+b\le 4$ 时，有 $2\sqrt{ab}\le a+b\le 4$，解得 $ab\le 4$，充分性成立；

当 a=1, b=4 时，满足 $ab\le 4$，但此时 $a+b$=5>4，必要性不成立，综上所述，“$a+b\le 4$”是“$ab\le 4$”的充分不必要条件.

【名师点睛】易出现的错误有，一是基本不等式掌握不熟，导致判断失误；二是不能灵活的应用“赋值法”，通过特取 a,b 的值，从假设情况下推出合理结果或矛盾结果.

7.设 $x\in R$，则“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的(　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】化简不等式，可知 $0<x<5$ 推不出 $|x-1|<1$；

由 $|x-1|<1$ 能推出 $0<x<5$，

故“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的必要不充分条件，

故选 B。

8.若 $a>0,b>0$，则“$a+b\le 4$”是“$ab\le 4$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】当$a>0, b>0$时，$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，则当$a+b\leq 4$时，有$2\sqrt{ab}\leq a+b\leq 4$，解得$ab\leq 4$，充分性成立；当a=1, b=4时，满足$ab\leq 4$，但此时$a+b$=5>4，必要性不成立，综上所述，“$a+b\leq 4$”是“$ab\leq 4$”的充分不必要条件.

9.已知$x\geq 1$，则当$x+\frac{4}{x}$取得最小值时，x的值为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

10.若正数m,n满足$2m+n=1$，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为

A．$3+2\sqrt{2}$　　B．$3+\sqrt{2}$

C．$2+2\sqrt{2}$　　D．3

【答案】A

【解析】由题意，因为$2m+n=1$，

则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\cdot(2m+n)=3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\geq 3+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}=3+2\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}$，即$n=\sqrt{2}m$时等号成立，

所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为$3+2\sqrt{2}$，故选A.

11.已知$\log_2(a-2)+\log_2(b-1)\geq 1$，则$2a+b$取到最小值时，$ab=$

A．3　　B．4

C．6　　D．9

【答案】D

【解析】由$\log_2(a-2)+\log_2(b-1)\geq 1$，可得$a-2>0$，$b-1>0$且$(a-2)(b-1)\geq 2$.

所以$2a+b=2(a-2)+(b-1)+5\geq 2\sqrt{2(a-2)(b-1)}+5\geq 2\sqrt{2\times 2}+5=9$，

当$2(a-2)=b-1$且$(a-2)(b-1)=2$时等号成立，解得$a=b=3$.

所以$2a+b$取到最小值时$ab=3\times 3=9$.故选 D.

12.设$x>0,y>0,x+2y=5$，则$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为__________.

【答案】$4\sqrt{3}$

【解析】方法一：$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+2y+x+1}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}=2\sqrt{xy}+\frac{6}{\sqrt{xy}}$.

因为$x>0,y>0,x+2y=5$，

所以$x+2y=5\geq 2\sqrt{x\cdot 2y}$，

即$\sqrt{2xy}\leq\frac{5}{2},0<xy\leq\frac{25}{8}$，当且仅当$x=2y=\frac{5}{2}$时取等号成立.

又因为$2\sqrt{xy}+\frac{6}{\sqrt{xy}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{xy}\cdot\frac{6}{\sqrt{xy}}}=4\sqrt{3}$，当且仅当$2\sqrt{xy}=\frac{6}{\sqrt{xy}}$，即$xy$=3时取等号，结合$xy\leq\frac{25}{8}$可知，$xy$可以取到3，故$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为$4\sqrt{3}$.

方法二：$\because x>0,\quad y>0,\quad x+2y=5,$

$\therefore xy>0,\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+2y+x+1}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}=2\sqrt{xy}+\frac{6}{\sqrt{xy}}\geq 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$.

当且仅当$xy=3$时等号成立，

故$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为$4\sqrt{3}$.

【名师点睛】使用基本不等式求最值时一定要验证等号是否能够成立.

13.已知首项与公比相等的等比数列$\{a_n\}$中，若m，$n\in\mathbf{N}^*$，满足$a_m{a_n}^2={a_4}^2$，则$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为__________.

【答案】1

【解析】设等比数列$\{a_n\}$公比为q，则首项$a_1=q$，

由$a_m a_n^2=a_4^2$得：$a_1q^{m-1}\cdot(a_1q^{n-1})^2=(a_1q^3)^2$，

则：$q^{m+2n}=q^8$，$\therefore m+2n=8$，

$\therefore \frac{2}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+2n)=\frac{1}{8}\cdot\left(2+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}+2\right)=\frac{1}{8}\cdot\left(4+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\right)$，

$\because m,n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore \frac{4n}{m}>0,\frac{m}{n}>0$.

则$\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\geq 2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=4$（当且仅当$\frac{4n}{m}=\frac{m}{n}$，即$2n=m$时取等号）

$\therefore \left(\frac{2}{m}+\frac{1}{n}\right)_{\min}=\frac{1}{8}\times(4+4)=1$.

故填1.

14.已知函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集；

（Ⅱ）已知 $a>0$，且 $f(x)\geq 0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正实数根 x_1,x_2，求 $x_1{}^2+x_2{}^2$ 的取值范围.

解答：（Ⅰ）当 $a=1$时，由 $f(x)=x^2-2x-3\geqslant 0$ 解得 $\{x\,|\,x\geqslant 3或x\leqslant -1\}$.

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，二次函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$ 开口向上，对称轴为 $x=1$，

所以 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，

要使 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，只需 $f(3)=9a-6a-3\geqslant 0$，

所以 a 的取值范围是 $\{a\,|\,a\geqslant 1\}$

（Ⅲ） 因为 $f(x)=0$ 有两个不相等的正实数根 x_1,x_2，

所以$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=4a^2+12a>0 \\ x_1+x_2=2>0 \\ x_1\bullet x_2=-\dfrac{3}{a}>0 \end{cases}$，

解得 $a<-3$，所以 a 的取值范围是 $\{a\,|\,a<-3\}$.

因为 $x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\bullet x_2=4+\dfrac{6}{a}$，

所以，$x_1{}^2+x_2{}^2$ 的取值范围是 $(2,4)$.