

课题：不等式——学习任务单

【学习目标】

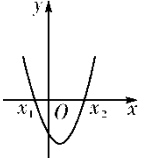
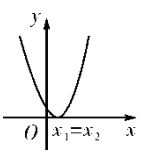
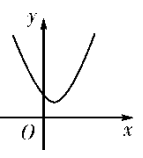
1. 通过对一元二次不等式相关问题的求解，进一步明确一元二次不等式与相应函数、方程的联系。
2. 明确基本不等式的应用条件，会用基本不等式解决简单的最大（小）值问题

【学法指导】

自主学习，独立思考，借助教材从新进行知识梳理，注意“三个二次之间的关系”，基本不等式的应用条件，对解决问题的方法进行总结归纳。

【任务一】知识回顾

1. “三个二次”之间的关系

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)的根	有两相异实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)的解集	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

2. 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

- (1) 基本不等式成立的条件： $a > 0, b > 0$.
- (2) 等号成立的条件：当且仅当 $a = b$ 时，等号成立.

3. 几个重要不等式

(1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(2) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ (a, b 同号).

(3) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(4) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

以上不等式等号成立的条件均为 $a = b$.

4. 利用基本不等式求最值问题

已知 $x > 0, y > 0$ ，则

- (1) 如果积 xy 是定值 p ，那么当且仅当 $x = y$ 时， $x + y$ 有最 小 值，是 $2\sqrt{p}$ (简记：积定和最小)；

- (2) 如果和 $x + y$ 是定值 p ，那么当且仅当 $x = y$ 时， xy 有最 大 值，是 $\frac{p^2}{4}$ (简记：

和定积最大).

【任务二】

【例 1】若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right\}$ ，则不等式 $2x^2+bx+a<0$ 的解集是_____.

解析：由题意知 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两根且 $a<0$ ，所以

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a}, \\ -\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{a}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=-12, \\ b=-2. \end{cases}$$

则不等式 $2x^2+bx+a<0$ ，即 $2x^2-2x-12<0$ ，所以 $x^2-x-6<0$ ，解得 $-2<x<3$.
所以不等式的解集是 $\{x \mid -2<x<3\}$

【例 2】不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集是 $(-1,2)$ ，对 a,b,c 有以下结论：

- ① $a>0$ ； ② $b>0$ ； ③ $c>0$ ； ④ $a-b+c>0$.

其中所有正确结论的序号是_____.

小结提升：

(1)解一元二次不等式的一般步骤

①化为标准形式(二次项系数大于 0)；②确定判别式 Δ 的符号；③若 $\Delta\geq 0$ ，则求出该不等式对应的二次方程的根，若 $\Delta<0$ ，则对应的二次方程无实根；④结合二次函数的图象得出不等式的解集.

(2)解含参数的一元二次不等式，需要对参数进行分类讨论

①二次项中若含有参数，应讨论是小于零、等于零，还是大于零，然后将不等式转化为二次项系数为正的形式；

②当不等式对应方程的根的个数不确定时，讨论判别式 Δ 与零的关系；

③确定无实根时可直接写出解集，确定方程有两个根时，要讨论两根的大小关系，从而确定解集形式.

【例 3】(1)已知 $0<x<1$ ，则 $x(3-3x)$ 取得最大值时 x 的值为()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

解析 因为 $0<x<1$ ，所以 $x(3-3x)=3x(1-x)\leq 3\left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\frac{3}{4}$ ，当且仅当 $x=1-x$ ，即 $x=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

(2)已知 $x<\frac{5}{4}$ ，则 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值为_____.

解析：因为 $x<\frac{5}{4}$ ，所以 $5-4x>0$ ，则 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+3\leq -2+3=1$ ，

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$, 即 $x=1$ 时, 等号成立. 故 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值为 1.

【例 4】(1) 已知直线 $ax+by+c-1=0 (b, c>0)$ 经过圆 $x^2+y^2-2y-5=0$ 的圆心, 则 $\frac{4}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值是()

- A. 9 B. 8 C. 4 D. 2

解析 (1) 圆 $x^2+y^2-2y-5=0$ 化成标准方程, 得 $x^2+(y-1)^2=6$, 所以圆心为 $C(0,1)$. 因为直线 $ax+by+c-1=0$ 经过圆心 C , 所以 $a \times 0 + b \times 1 + c - 1 = 0$, 即 $b+c=1$. 因此 $\frac{4}{b}+\frac{1}{c} = (b+c)\left(\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{4c}{b} + \frac{b}{c} + 5$. 因为 $b, c>0$, 所以 $\frac{4c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{4c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 4$, 当且仅当 $b=2c$, 且 $b+c=1$, 即 $b=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{3}$ 时, $\frac{4}{b}+\frac{1}{c}$ 取得最小值 9.

(2) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d , 其前 n 项和是 S_n , 若 $a_1=d=1$, 则 $\frac{S_n+8}{a_n}$ 的最小值是 _____.

解析 $a_n = a_1 + (n-1)d = n$, $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$, 所以 $\frac{S_n+8}{a_n} = \frac{\frac{n(1+n)}{2}+8}{n} = \frac{1}{2}\left(n+\frac{16}{n}+1\right) \geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{n \cdot \frac{16}{n}}+1\right) = \frac{9}{2}$, 当且仅当 $n=4$ 时, 等号成立. 所以 $\frac{S_n+8}{a_n}$ 的最小值是 $\frac{9}{2}$.

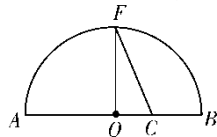
小结提升:

(1) 利用基本不等式解题一定要注意应用的前提: “一正” “二定” “三相等”. 所谓 “一正” 是指正数, “二定” 是指应用基本不等式求最值时, 和或积为定值, “三相等” 是指满足等号成立的条件.

(2) 在利用基本不等式求最值时, 要根据式子的特征灵活变形, 配凑出积、和为常数的形式, 然后再利用基本不等式.

(3) 条件最值的求解通常有两种方法: 一是将条件灵活变形, 利用常数代换的方法构造和或积为常数的式子, 然后利用基本不等式求解最值; 二是对条件使用基本不等式, 建立所求目标函数的不等式求解.

【拓展提升】《几何原本》卷 2 的几何代数法(以几何方法研究代数问题)成了后世西方数学家处理问题的重要依据, 通过这一原理, 很多的代数的公理或定理都能够通过图形实现证明, 也称之为无字证明. 现有如图所示图形, 点 F 在半圆 O 上, 点 C 在直径 AB 上, 且 $OF \perp AB$, 设 $AC=a, BC=b$, 则该图形可以完成的无字证明为()



- A. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$
 B. $a^2+b^2 \geq 2ab (a>0, b>0)$
 C. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$
 D. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a>0, b>0)$

解析 由 $AC=a$, $BC=b$ 可得圆 O 的半径 $r=\frac{a+b}{2}$, 又 $OC=OB-BC=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}$, 则 $FC^2=OC^2+OF^2=\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}$, 再根据题图知 $FO\leq FC$, 即 $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 故选 D.