

## 课题：计数原理

### 【学习目标】

(1) 通过本专题的复习,一方面提升根据问题的特征选择运用两个计数原理以及排列、组合概念分析和解决问题的能力;另一方面提升综合运用二项式展开式、通项公式、二项式系数等知识解决问题的能力.

(2) 通过本专题学习、反思提炼,促进逻辑推理、数学运算和数学抽象等核心素养的提升.

### 【学法指导】

重点:认真听典例,了解计数原理容易失分的点,总结计数原理的解题思想.

难点:总结提炼解题思想,完成课后作业.

### 【学习任务】

#### 【预备知识】

#### 1. 排列

(1) 排列数的定义:从  $n$  个不同元素中,任取  $m(m \leq n)$  个不同元素的所有排列的个数叫做从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的排列数,用符  $A_n^m$  表示.

(2) 排列数公式:  $A_n^m = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 全排列数公式:  $A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$  (叫做  $n$  的阶乘).

#### 2. 组合

(1) 组合数的定义:从  $n$  个不同元素中取出  $m(m \leq n)$  个不同元素的所有组合的个数,叫做从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的组合数.用符  $C_n^m$  表示.

(2) 组合数公式:  $C_n^m = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 二项式定理:  $(a+b)^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二项式系数:

二项展开式的通项:

二项式系数的性质:

### 【典型例题】

**【例 1】**四大名著是中国文学史上的经典作品,是世界宝贵的文化遗产.某学校举行的“文学名著阅读月”活动中,甲、乙、丙、丁、戊五名同学相约去学校图书室借阅四大名著《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》、《西游记》(每种名著至少 5 本),要求每人只借阅一本名著,则不同的借阅方案种数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .  $4^5$

解析:完成一件什么事? 从题意知:甲、乙、丙、丁、戊五名同学去借阅四大名著(每种

名著至少 5 本), 要求每人只借阅一本名著. 求不同的借阅方案种数? 怎样完成的这件事? 让 5 人轮流从 4 本书中自由选取各自喜欢的一本书, 分 5 个步骤即可完成, 每一步都是 4 种选法. 根据分步计数原理,  $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ .

**【变式 1】**四大名著是中国文学史上的经典作品, 是世界宝贵的文化遗产. 某学校举行的“文学名著阅读月”活动中, 甲、乙、丙、丁、戊五名同学相约去学校图书室借阅四大名著《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》、《西游记》(每种名著均有若干本), 要求每人只借阅一本名著, 每种名著均有人借阅, 则不同的借阅方案种数为\_\_\_\_\_.

解析: 第一步: 考虑将借阅同一种名著的两人并成一组, 有  $C_5^2$  种可能, 第二步: 将这两人与另外 3 人看成四个借书主体, 借阅 4 种不同的名著, 为全排列模型, 有  $A_4^4$  种情形, 根据分步计数原理:  $C_5^2 A_4^4 = 240$ . 则不同的借阅方案种数为 240.

**【变式 2】**【2018·北京市房山区一模】四大名著是中国文学史上的经典作品, 是世界宝贵的文化遗产. 某学校举行的“文学名著阅读月”活动中, 甲、乙、丙、丁、戊五名同学相约去学校图书室借阅四大名著《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》、《西游记》(每种名著均有若干本), 要求每人只借阅一本名著, 每种名著均有人借阅, 且甲只借阅《三国演义》, 则不同的借阅方案种数为\_\_\_\_\_.

解析: **第 1 类方法**是只有甲借阅了《三国演义》, 另外 4 个人借《红楼梦》、《水浒传》、《西游记》三种名著, (每种名著均有若干本). 每个人只借阅一本名著, 每种名著都有人借, 那么就有且仅有两人借同一种名著, 由变式 1 我们知道这类问题分两步完成  $C_4^2 A_3^3 = 36$  种.

**第 2 类方法**是 乙、丙、丁、戊中有一人也借阅《三国演义》. 第 2 类也是分两步完成. 第 1 步, 从乙、丙、丁、戊中选 1 人借阅《三国演义》, 有  $C_4^1$  种方法, 第 2 步, 剩下 3 人, 去借剩下的 3 种不同名著,  $A_3^3$  种方法, 根据分步计数原, 有  $C_4^1 A_3^3 = 24$  种.

综上: 根据分类计数原理, 则不同的借阅方案种数为  $36 + 24 = 60$  种.

**【题后反思】**解题必先审题, 参悟题意再动手. 解决综合问题的解题思路是“先分类, 后分步”

**【例 3】**(2018 课标全国 I, 15)

从 2 位女生, 4 位男生中选 3 人参加科技比赛, 且至少有 1 位女生入选, 则不同的选法共有\_\_\_\_\_种. (用数字填写答案)

分析：这道题的解题策略是“先分类，后分步”。依题意分两类：第1类：1名女生和2名男生入选。第2类：2名女生和1名男生入选，

根据分类计数原理：不同的选法共有  $C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1 = 16$  种。

**【例 4】(2014 北京石景山一模)**各大学在高考录取时采取专业志愿优先的录取原则。一考生从某大学所给的 7 个专业中，选择 3 个作为自己的第一、二、三专业志愿，其中甲、乙两个专业不能同时兼报，则该考生有\_\_\_\_\_种不同的填报专业志愿的方法(用数字作答)。

解析：直接法：分三类：

第 1 类选出的 3 个专业含甲不含乙，作为该考生的第一、二、三专业志愿

第 1 类填报志愿的方法种数是  $C_5^2 A_3^3 = 60$ 。

第 2 类选出的 3 个专业含乙不含甲，作为该考生的第一、二、三专业志愿

第 2 类填报志愿的方法种数是  $C_5^2 A_3^3 = 60$ 。

第 3 类选出的 3 个专业甲乙都不含，作为该考生的第一、二、三专业志愿

第 3 类填报志愿的方法种数是  $C_5^3 A_3^3 = 60$

根据分类计数原理：该生填报志愿的方法种数是  $C_5^2 A_3^3 + C_5^2 A_3^3 + C_5^3 A_3^3 = 180$

间接法：  $C_7^3 A_3^3 - C_5^1 A_3^3 = 180$ 。

**【题后反思】**排列与组合的联系与区别是什么？

排列概念与组合概念的共同点是，都要“从  $n$  个不同元素中，任取  $m$  个元素 ( $m \leq n$ )”，不同点是排列要“按照一定的顺序排成一列”，而组合却是“不管顺序地并成一组”。因此，在解决问题时，应当抓住“顺序”这个关键来区分排列问题与组合问题。当问题既涉及排列，又与组合有关时，一般采取“先组合，后排列”的方法，即先选出元素，再对被选的元素按顺序“放置”。

**【例 5】**社区主任要为小红等 4 名志愿者和他们帮助的 2 位老人合影，按下列要求站成一排，则不同的排法种数是多少？

(1) 要求 2 位老人站在中间，小红不站在两端，

(2) 小红必须与 2 位老人都相邻，且两位老人不排在两端，

(3) 要求两位老人不能相邻。

(1) 解析：根据题意，完成这件事，我们需要分 3 步：

①将 2 名老人安排在中间的 2 个位置，有  $A_2^2 = 2$  种情况，

②小红不能在两端，在剩下的 4 个位置中，有 2 个符合要求， $A_2^1 = 2$

③将剩下的 3 名志愿者，安排在剩下的 3 个位置，为全排列模型，有  $A_3^3 = 6$  种情况，

根据分步计数原理：得到不同的排法  $2 \times 2 \times 6 = 24$  种。

**【题后反思】**特殊元素、特殊位置优先策略是解决有附加条件的排列组合题的基本方法，一般先考虑特殊元素或特殊位置，再考虑其他元素或位置。另外，还要注意隐含的特殊元素（或特殊位置），如：0 不能在首位，奇数，偶数问题等。

(2) 解析：根据题意，完成这件事，我们需要分 3 步：第 1 步：小红必须与 2 位老人都相邻，则小红只能在两位老人之间，相邻问题，捆绑策略，将两位老人和小红捆绑在一起来看成一个元素，两个老人可以交换顺序， $A_2^2 = 2$  种方法。第 2 步且两位老人不在两端，有四个位置，则小红和老人在中间的两个位置，选择一个  $A_2^1 = 2$ ，第 3 步，剩下 3 个志愿者，安排在剩下的 3 个位置，为全排列模型， $A_3^3 = 6$ 。根据分步计数原理： $A_2^2 A_2^1 A_3^3 = 24$

(3) 解析：分两步完成。第 1 步，除两个老人之外其他四个人没有限制条件，4 个人选 4 个位置排列，有  $A_4^4$  种，第 2 步，四个人站好后，有 5 个空，任选两个空排老人，排法是  $A_5^2$  种，根据分步计数原理：有  $A_4^4 A_5^2 = 480$  种排法。

### 【例 6】

在  $(3x - \frac{1}{x})^6$  的展开式中：

- (1) 常数项为\_\_\_\_\_；
- (2)  $x^4$  的系数是\_\_\_\_\_；
- (3) 二项式系数之和为\_\_\_\_\_，其中第\_\_\_\_\_项是二项式系数最大的项；
- (4) 各项系数之和为\_\_\_\_\_。

解析：(1) 当  $r = 3$  时可求出常数项为 -540。

(2) 当  $r = 1$  时可求  $x^4$  的系数为 -1458。

(3)  $2^6 = 64$ ，第 4 项最大。

(4) 采用赋值法，令  $x = 1$  得  $2^6 = 64$

### 【小结提升】

1. 解决综合问题，其解题思路是“先分类，后分步”；“分类加法，分步相乘，有序排列，无序组合”，根据问题的特征，选用合适的解题方法。
2. 有限制条件的排列问题：特殊元素（位置）优先考虑；相邻问题，捆绑处理；不相邻问题，插空法；多元问题，分类讨论。
3. 求二项式展开式的二项式系数，某指定项的系数问题，归根到底是二项式展开式的通项

应用问题，熟练运用公式是解题的关键。

**【本专题学法指导】**

1. 2 个计数原理的理解并不困难，困难的是如何根据问题的特征选择对应的原理，所以要达到能用，会用的境界需要有一定量的应用训练。
2. 由于排列组合应用题所涉及背景非常丰富，所以学习中要掌握一些典型问题的思维模式，并注意常见题型与常用方法的归纳，在解决排列与组合问题时，为避免出现重复和遗漏计算，用错公式等问题，应充分利用树形图或框图进行分析，这样比较直观。
3. 二项式问题，一定要熟练掌握二项式的通项公式及二项式系数的性质。注意理解“项”，“项数”，“系数”，“二项式系数”等容易混淆的一些概念。