
集合与常用逻辑用语

【使用说明】

集合与常用逻辑用语是高考高频考点，侧重基础。本专题包括：集合的概念与表示，集合的基本关系，集合的基本运算，必要条件、充分条件、充要条件，全称量词与存在量词，全称量词命题与存在量词命题的否定，共六部分内容。因本专题内容对数学抽象与逻辑思维有一定的要求，所以我们有必要再练一练。本节课我们将琳琅满目的问题进行分解，逐一带领大家去突破这些难点问题。本课时中涉及到的部分题目，同学们在之前的复习中可能已经做过了，在这个时间点设计这样的专题，将这些问题重新再做，然后再进行梳理和小结，目的是希望同学们通过这样一轮复习之后，对于这类问题能够比之前有更深入的认识和更强的处理能力。

【学法指导】

大家对于这部分题目可能会有一种没什么可复习，会者不难的感觉。希望通过我们这一专题的设计能够让大家都建立在原有基础上有所收获，使同学们能够对问题认识的更加系统和深刻；同时一些分析问题和提炼总结的意识能够推广到其他知识的复习上。同学们可以通过教师的讲解、图形的辅助来理解和掌握本课的教学内容。

【主要方法】

- 1、理解问题、探索解题路径；
- 2、将抽象数学问题具体化。

【教学目标】

- 1、同学们通过本课的练习，争取能够掌握分析与处理本专题选择、填空问题的方法，及问题通向答案的探索路径。
- 2、同学们通过作业中相应题目的练习，争取能够掌握并夯实处理此类问题的方法（用 Venn 图和数轴将集合直观表示出来；将集合间的关系与命题间的关系进行转化等）；
- 3、同学们通过这一个专题的努力探索，争取能够对于知识之间的横向、纵向联系有一定的把握。

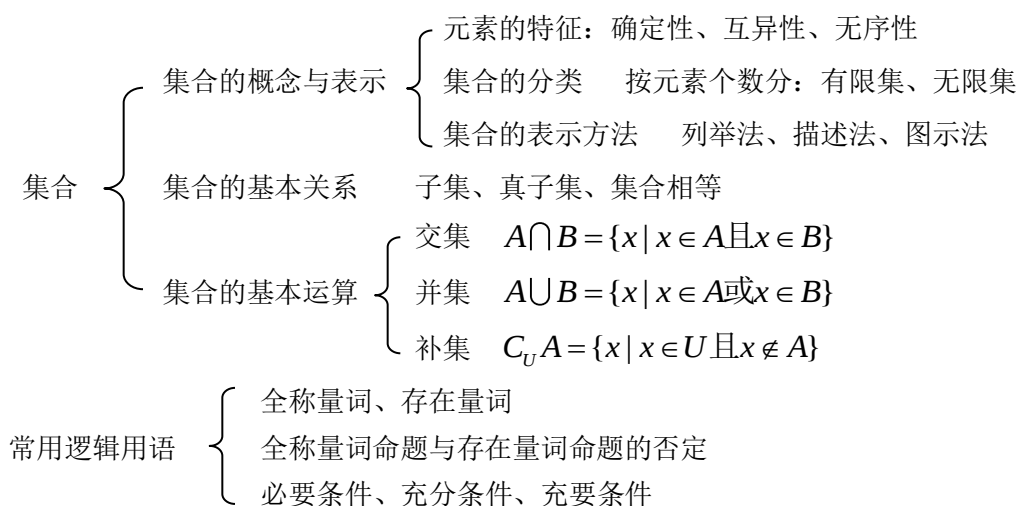
【教学重点】

- 1、集合的关系与运算、充要条件的判断、对含有一个量词的命题进行否定；
- 2、一些基本的转化方法。

【教学难点】

抽象问题如何具体化。

【本专题知识网络】



【例题讲解】方法提炼·总结升华

专题一 集合的概念与表示

【例 1】 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则集合 $B = \{x-y | x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是()

- A.1 B.3 C.5 D.9

分析： 集合 A 与集合 B 分别采用了哪种表示法？

集合 B 中元素是什么？

集合 B 中 x, y 分别取哪些值？

因为集合 B 中元素为 $x-y$, 且 $x \in A, y \in A$,

所以 x 的可能取值为 0, 1, 2; y 的可能取值为 0, 1, 2.

当 $x=0$ 时, $y=0$ 或 1 或 2, 此时对应的 $x-y$ 的值为 0, -1, -2;

当 $x=1$ 时, $y=0$ 或 1 或 2, 此时对应的 $x-y$ 的值为 1, 0, -1;

当 $x=2$ 时, $y=0$ 或 1 或 2, 此时对应的 $x-y$ 的值为 2, 1, 0.

集合 B 中元素有多少个？

结合集合中元素的互异性, 集合 B 中元素的个数为 5,

综上所述, 集合 $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. 答案 C

跟踪训练 1 设集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 < x < 4\}$, $B = \{x | (x-4)(x-5)=0\}$, $M = \{x | x=a+b, a \in A, b \in B\}$, 则集合 M 中元素的个数为()

- A.3 B.4 C.5 D.6

分析： 集合 M 中元素是什么？

集合 A 中元素有哪些？ $A = \{1, 2, 3\}$

集合 B 中元素有哪些？ $B = \{4, 5\}$

则 a 的取值为 1, 2, 3, b 的取值为 4, 5.

当 $b=4$ 时, $a=1$ 或 2 或 3, 此时对应的 x 的值为 5, 6, 7;

当 $b=5$ 时, $a=1$ 或 2 或 3, 此时对应的 x 的值为 6, 7, 8;

所以, $x=a+b$ 的值为 5, 6, 7, 8, 集合 M 中有 4 个元素.

答案 B

考虑集合元素的互异性

小结：

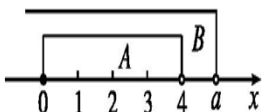
1. 若已知集合是用描述法给出的,则读懂集合的代表元素及其属性是解题的关键. 如:
 $B = \{x-y | x \in A, y \in A\}$
2. 若已知集合是用列举法给出的,则整体把握元素的共同特征是解题的关键. 如:
 $A = \{0, 1, 2\}$
3. 对集合中的元素要进行验证,保证集合内的元素不重复.

专题二 集合的基本关系

【例 2】 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \subsetneq B$, 求实数 a 的取值范围.

分析: 集合 A 如何表示更直观? 数轴

$A \subsetneq B$ 如何表示? 要满足 $A \subsetneq B$, 表示数 a 的点必须在表示 4 的点处或在表示 4 的点的右侧



所求 a 的取值范围为 $\{a | a \geq 4\}$.

跟踪训练 2 已知集合 $M = \{x | x - a = 0\}$, $N = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $N \subseteq M$, 则实数 a 的值为_____.

分析: 分析集合 M 中的元素

分析集合 N 中的元素 $N = \emptyset$, $N \neq \emptyset$

$N \subseteq M$ 如何转化? 1) 当 $N = \emptyset$, 即 $a = 0$

2) 当 $N \neq \emptyset$ 时, $a \neq 0$

则 $M = \{a\}$, $N = \{\frac{1}{a}\}$, 依题意有 $\frac{1}{a} = a$, 所以 $a = \pm 1$.

综上, 实数 a 的值为 0, 1, -1.

小结:

1. 利用集合的基本关系求参数的问题, 借助数轴分析时, 要验证参数能否取到端点值.
2. 要注意空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集.

专题三 集合的基本运算

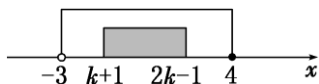
【例 3】 已知集合 $A = \{x | -3 < x \leq 4\}$, 集合 $B = \{x | k+1 \leq x \leq 2k-1\}$, 且 $A \cup B = A$, 试求 k 的取值范围.

分析: $A \cup B = A$ 如何转化?

转化为 $B \subseteq A$, 结合题意再分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种情况讨论.

① 当 $B = \emptyset$ 时, $k+1 > 2k-1$, $\therefore k < 2$.

② 当 $B \neq \emptyset$,



根据数轴可得
$$\begin{cases} k+1 \leq 2k-1, \\ -3 < k+1, \\ 2k-1 \leq 4, \end{cases} \quad \text{解得 } 2 \leq k \leq \frac{5}{2}.$$

所以, k 的取值范围为 $\left\{k \mid k \leq \frac{5}{2}\right\}$.

跟踪训练 3 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $A = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 2a < x < a + 2\}$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$;

(2) 若 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

分析: (1) 先将 $a = -1$ 代入集合 B , 再借助数轴求解;

(1) 当 $a = -1$ 时, $B = \{x | -2 < x < 1\}$,

所以, $A \cap B = \{x | \frac{1}{2} \leq x < 1\}$, $A \cup B = \{x | -2 < x \leq 3\}$.

(2) ① 由已知可求得 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x < \frac{1}{2}, \text{ 或 } x > 3\}$.

② 将 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = B$ 转化为? $B \subseteq \complement_{\mathbf{R}} A$, 再分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种情况讨论.

当 $B = \emptyset$ 时, $2a \geq a + 2$, 解得 $a \geq 2$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} 2a < a + 2, \\ a + 2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2a < a + 2, \\ 2a \geq 3, \end{cases}$ 解得 $a \leq -\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{2} \leq a < 2$.

综上, a 的取值范围是 $\{a | a \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } a \geq \frac{3}{2}\}$.

小结:

1. 若所给集合是有限集, 则首先把集合中的元素一一列举出来, 然后结合交集、并集、补集的定义来求解. 另外, 针对此类问题, 在解答过程中也常常借助 Venn 图来求解. 这样处理起来比较直观、形象, 且解答时不易出错.

2. 若所给集合是无限集, 则常借助数轴, 首先把已知集合及全集分别表示在数轴上, 然后再根据交集、并集、补集的定义求解, 这样处理比较形象直观, 解答过程中注意边界问题.

专题四 全称量词命题与存在量词命题的否定

【例 4】 写出下列命题的否定, 并判断其真假:

(1) 有些质数是奇数;

(2) 菱形的对角线互相垂直;

(3) $\exists x_0 \in \mathbf{N}, x_0^2 - 2x_0 + 1 < 0$;

(4) 不论 m 取何实数, 方程 $x^2 + 2x - m = 0$ 都有实数根.

分析: 题目中有哪些全称量词与存在量词?

(1) 是存在量词命题,

其否定为“所有质数都不是奇数”, 它是假命题.

(2) 是全称量词命题,

其否定为“有的菱形的对角线不垂直”, 它是假命题.

(3) 是存在量词命题,

其否定为“ $\forall x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ”, 它是真命题.

(4) 是全称量词命题,

其否定为“存在实数 m_0 , 使得方程 $x^2 + 2x - m_0 = 0$ 没有实数根”, 它是真命题.

小结:

(1)一般地,写含有一个量词的命题的否定,首先要明确这个命题是全称量词命题还是存在量词命题,并找到其量词的位置及相应结论,然后把命题中的全称量词改成存在量词,存在量词改成全称量词,同时否定结论.

(2)对于省略量词的命题,应先挖掘命题中隐含的量词,改写成含量词的完整形式,再依据规则来写出命题的否定.

专题五 充分条件、必要条件的判断及应用

【例 5】“关于 x 的不等式 $x^2-2ax+a>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ ”的一个必要不充分条件是()

- A. $0<a<1$ B. $0<a<\frac{1}{3}$ C. $0\leq a\leq 1$ D. $a<0$ 或 $a>\frac{1}{3}$

分析: 本题的关键点? 不等式 $x^2-2ax+a>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,
应有 $\Delta=(-2a)^2-4a<0$, 即 $4a^2-4a<0$,
所以 $0<a<1$.

所以本题转化为 $0<a<1$ 成立的一个必要不充分条件

谁 $\nRightarrow 0<a<1$, $0<a<1 \Rightarrow$ 谁, 所以本题答案 C.

小结:

1. “若 p , 则 q ”命题按条件和结论的充分性、必要性可分为四类:

(1)充分不必要条件, 即 $p\Rightarrow q$, 而 $q\nRightarrow p$.

(2)必要不充分条件, 即 $p\nRightarrow q$, 而 $q\Rightarrow p$.

(3)充要条件, 既有 $p\Rightarrow q$, 又有 $q\Rightarrow p$.

(4)既不充分也不必要条件, 既有 $p\nRightarrow q$, 又有 $q\nRightarrow p$.

2. 充分条件与必要条件的判断.

(1)直接利用定义判断: 即“若 $p\Rightarrow q$ 成立, 则 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件”.

(2)利用集合间的包含关系进行判断: 如果条件 p 和结论 q 都是集合, 那么若 $p\subseteq q$, 则 p 是 q 的充分条件; 若 $p\supseteq q$, 则 p 是 q 的必要条件; 若 $p=q$, 则 p 是 q 的充要条件.

跟踪训练 4 已知 $P=\{x|a-4<x<a+4\}$, $Q=\{x|1<x<3\}$, “ $x\in P$ ”是“ $x\in Q$ ”的必要条件, 求实数 a 的取值范围.

分析: “ $x\in P$ ”是“ $x\in Q$ ”的必要条件如何转化?

$$Q\subseteq P.$$

思路: (1) 根据 p 与 q 的关系(充分、必要、充要条件)转化为集合间的关系,

(2) 利用集合间的关系建立不等关系,

(3) 求解参数范围.

$$\text{所以} \begin{cases} a-4\leq 1 \\ a+4\geq 3 \end{cases} \text{ 解得 } -1\leq a\leq 5$$

即 a 的取值范围是 $[-1, 5]$.

集合的实际应用

【例 6】 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，有如下结果：赞成 A 的人数是 30，其余的不赞成，赞成 B 的人数是 33，其余的不赞成；另外，对 A、B 都不赞成的学生比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人. 问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各多少人？

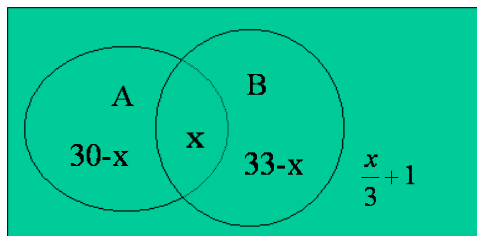
分析：题目中的几类人员如何表示？

设对 A、B 都赞成的有 x 人

画出 Venn 图，形象地表示出各数量关系的联系

所以 $30 - x + x + 33 - x + \frac{x}{3} + 1 = 50$.

则 $x = 21$, $\frac{x}{3} + 1 = 8$.



小结：

解决这一类问题一般采用数形结合，借助于 Venn 图，把抽象的数学语言与直观的图形结合起来.